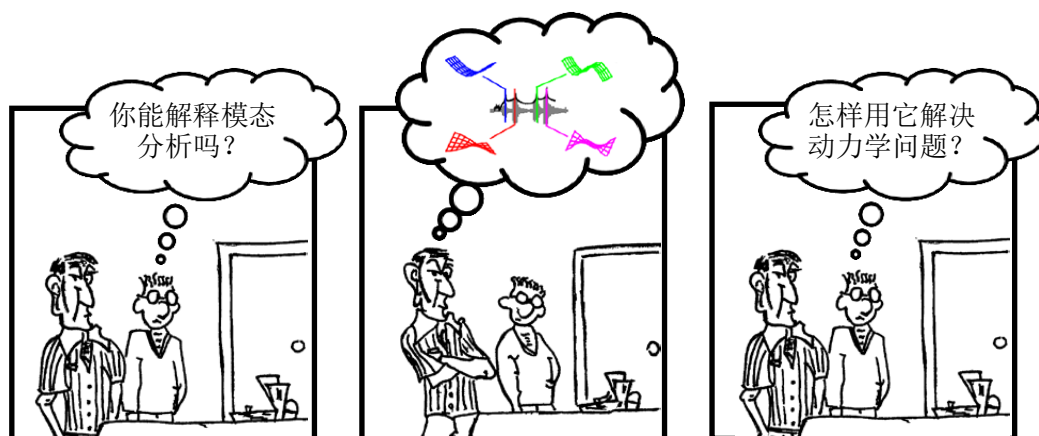
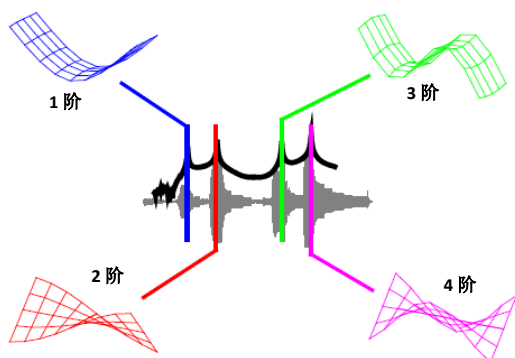


# (我们小小世界中的) 模态空间



本文档为模态分析相关文集  
实验模态分析——非数学角度的简单综述  
(2001 年 1 月由 Sound & Vibration 杂志社出版)  
模态空间——回归基础 (1998 至 2014)  
(由 SEM 实验技术出版社出版)



*Peter Avitabile*

原作者: **Peter Avitabile** 博士, 教授  
美国马萨诸赛州立大学洛威尔校区结构动力学和声学系统实验, 机械工程  
马萨诸赛州洛威尔一大学大街, 01854  
[peter\\_avitabile@uml.edu](mailto:peter_avitabile@uml.edu)  
<http://sdasl.uml.edu>  
978-934-3176

翻译: 谭祥军

# Modal Space Authorization

(Peter Avitabile教授的书面授权)

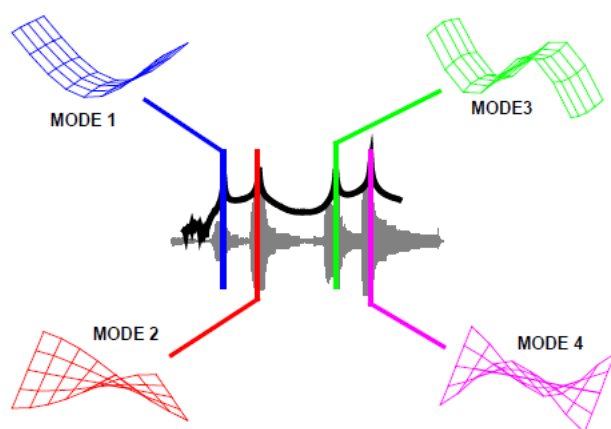
Xiangjun Tan / 谭祥军

RE: Article Series: Modal Space – In Our Own Little World

The series “Modal Space – In Our Own Little World” was written by Peter Avitabile who owns the rights to the series. These articles were later published under the title of “Modal Space – Back to Basics” by Society for Experimental Mechanics and Blackwell Publishing.

This letter grants you the right to post these articles freely on your webpage for you and your customers to use for educational purposes only; the articles are not to be sold in any form whatsoever. Please acknowledge this properly in your posting of the articles.

In addition, you may convert these articles to your native Chinese language for better use for your customers. This translation does not grant you any specific rights or any additional use of the articles. These translated articles can also be posted freely on your webpage for you and your customers to use for educational purposes only.



Sincerely,

Dr. Peter Avitabile  
Professor, Mechanical Engineering  
Structural Dynamics and Acoustics  
Systems Laboratory  
University of Massachusetts Lowell  
One University Avenue  
Lowell, Massachusetts 01854  
[peter\\_avitabile@uml.edu](mailto:peter_avitabile@uml.edu)  
<http://sdasl.uml.edu>  
978-934-3176

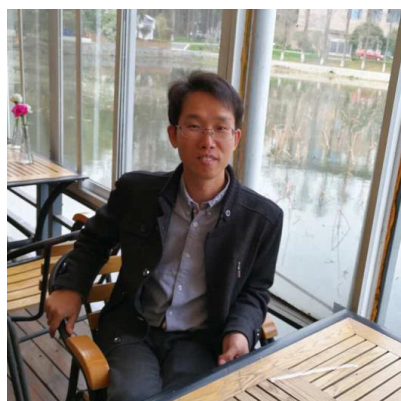
## 译者序



原作者 **Peter Avitabile** 教授是美国马萨诸塞州立大学洛威尔校区机械工程系模态分析和控制实验室主任。分别从美国曼哈顿机械工程学院、罗得岛大学和马萨诸塞州立大学获得学士、硕士和博士学位。**Peter** 在有限元设计与分析和实验模态分析技术方面有着 30 多年的经验，主要研究结构动力学方面，专注于结构动力学模型的建立、测试、分析模型与实验模型的相关性检查，以及动力学模型的高级应用。在 *Sound & Vibration* 杂志和 *International Modal Analysis Conference*（国际模态会议）发表了多篇技术论文与专著，其中他的 *Modal Space*（《模态空间》）发表在 *Experiment Techniques*（实验技术）杂志上，并由实验力学协会（SEM）出版发行。2004 年，因他在实验力学方面的突出贡献，获得了杰出的 SEM DeMichle 奖。

**Peter** 从 98 年开始，每两月写一篇实验模态测试与分析方面的小文章，截止 2014 年 12 月为止，已持续 17 年。在这些文章中，**Peter** 尽量使用通俗易懂的语言诠释模态测试与分析方面的各类问题，做到能不用公式的地方尽量不用公式，能用通俗易懂的语言的地方尽量用通俗易懂的语言描述。首先是从非数学角度对实验模态测试与分析的流程进行了大致的综述，使读者对模态测试与分析过程有了一个初步的了解。然后再从遇到的各个问题出发，解释问题出现的可能原因，最后给出问题的解决方案。

英文原著全文见 <https://www.uml.edu/Research/SDASL/Education/Modal-Space.aspx>。更多内容请见马萨诸塞州立大学洛威尔校区机械工程系模态分析和控制实验室主页 <http://sdasl.uml.edu/>。本书内容从实验模态测试与分析实际应用出发，侧重于模态测试与分析过程中所出现的各种问题的解决，使读者在模态测试与分析过程中尽量避免这些问题的出现，更进一步了解这些问题背后的本质。每篇文章的开篇插图由 Mike Avitabile 制作。



译者先后从湖南大学和北京工业大学获得力学学士和硕士学位，之后一直从事振动噪声工作多年，先后就职于北京东方振动和噪声技术研究所，西门子工业软件（北京）有限公司（原 LMS（北京）技术有限公司）。译者从 2009 年开始，陆陆续续对 **Peter** 的《模态空间》进行中文翻译，中文翻译同步发表在译者的个人博客《模态空间》（<http://www.modalspace.blog.sohu.com>）上。该空间除了《模态空间》的译文之外，还有信号处理、扭振测试与分析、声学、应力应变等 NVH 方面的博文，但博客已于 2016 年 7 月停止更新，转而开通了微信公众号：**模态空间**，敬请关注，后续文章将在此平台进行发布。博客中的译文没有校准过，而本文档是译者重新校正过的。在翻译的时候，尽量保持原著的特色，没有作任何删减。比如每篇文章 **Peter** 都以“如果你还有模态分析其他问题，请咨询我”结束，译者在译本中都作了保留。由于译者水平有限，翻译过程中难免不出错，敬请广大读者批评指正，提出宝贵意见。译者的邮箱为 [linmue@qq.com](mailto:linmue@qq.com)。

谭祥军 2016 年夏于北京

# 目 录

实验模态分析.....	1
前言.....	1
可以为我解释一下模态分析吗？.....	1
频响函数到底是什么？.....	3
为何只需要频响函数矩阵的一行或一列？.....	5
锤击法和激振器测试有什么不同之处？.....	7
计算 FRF 实际需要测量什么？.....	9
锤击法测试最需要考虑什么？.....	10
激振器测试最需要考虑什么？.....	12
请告诉我窗函数的更多方面，它们似乎相当重要！.....	13
从平板的频响函数怎样得到模态振型？.....	14
什么是工作数据？.....	16
模态数据有何作用？.....	19
采集模态数据还是工作数据？.....	19
总结.....	21
参考文献.....	21
98.02: 你能为我解释模态分析吗？.....	22
98.04: 能解释时域、频域和模态空间的不同之处吗？.....	25
98.06: 激振器和力锤进行模态测试，有什么不同？.....	28
98.08: 移动力锤和移动加速度计测试有什么不同？.....	31
98.10: 应该总是使用硬锤头做测试才能确保力谱在整个频带内平坦？.....	33
98.12: 激振器哪种激励信号最好？它们有什么不同？.....	36
99.02: 曲线拟合令我感到迷惑，各种不同的拟合技术意味什么？.....	39
99.04: 我仍不理解曲线拟合，怎样由 FRF 得到模态振型？.....	42
99.06: 工作变形和模态振型之间有什么不同？有时它们看起来一样！.....	45
99.08: 确定由 H 矩阵的一行或一列就能得到模态振型？.....	48
99.10: 我听别人说 Pete 不使用窗函数，这是为什么呢？.....	51
99.12: 我对模态所有名词仍不理解，你能给一张“全局示意图”吗？.....	53
00.02: 向他人展示模态振型，他们问我结构设计是否合理，我该怎样回答？.....	55
00.04: 我可以用倾角激励进行模态测试吗？.....	58
00.06: 模态测试时，测点数目多少足够？.....	61
00.08: 有人告诉我说 SDM 不起作用，因为得不到系统所有模态。.....	64
00.10: 为什么质量载荷和数据一致性对模态参数估计很重要？.....	67
00.12: 一直听说 SVD，你能为我简单地解释一下吗？.....	69
01.02: 使用实际工作载荷进行模态测试有意义吗？.....	72
01.04: 锤击测试使用指数窗会引起什么问题？.....	75
01.06: 使用多参考点有何好处？.....	78
01.08: 锤击法测试哪些事项需要着重考虑？.....	81
01.10: 模态参数估计应该使用采集到的所有 FRF 吗？.....	84
01.12: 测试设置对测量的模态数据有影响吗？边界条件和加速度计有影响吗？.....	87



02.02: 对于不同类型的模态测试, 哪种窗函数最合适? .....	90
02.04: 复模态和实模态有什么不同? .....	93
02.06: 能为我解释模态测试数据采集的基本步骤吗? .....	96
02.08: MIMO 有什么现实优势? 为什么不使用 SISO 然后移动激振器? .....	99
02.10: 模态测试容易犯的主要错误是什么, 这样我就可以不犯同样的错误了? .....	102
02.12: 模态测试采集平均 FRF 好, 还是采集时域数据然后再处理它好呢? .....	105
03.02: 为什么校准和模态振型缩放很重要? 它们影响重大吗? .....	107
03.04: 真的有必要拒绝连击吗? 它们真的是个问题? .....	110
03.06: 有人告诉我, 辨别伪重根必须有多个参考点。.....	112
03.08: 对结构部分关心部位做模态测试, 发现许多相同的振型。我做错了什么吗? .....	114
03.10: 为什么一些 FRF 存在反共振峰, 而其他的又没有呢? .....	116
03.12: 局部拟合和整体拟合有何不同之处? .....	118
04.02: 我们谈论过模态测试的测点数目。但有人告诉我不需要完全定义整个振型。.....	121
04.04: 模态测试需要将参考加速度计安装在 X, Y 和 Z 方向吗? .....	123
04.06: 模态振型缩放需要驱动点测量。有其他不需要驱动点测量的缩放方法吗? .....	126
04.08: 我发现难以理解数字化仪的过载、欠载和量程设置。.....	129
04.10: 平板的模态振型有预定的顺序吗? .....	132
04.12: 一旦我进行了一个高质量的测量, 还需要察看每个 FRF 的时域频域结果吗? .....	134
05.02: 我知道激振器有不同的激励信号, 哪种是最合适的? .....	137
05.04: 锤击测试力谱看起来失真, 你会认为 FFT 分析仪有问题吗? .....	140
05.06: 为什么稳态图显示出来的系统部件模态, SUM 或 MIF 却显示不出来? .....	142
05.08: 有时锤击力如预期一样光顺, 但经常也会出现振荡现象, 这是为什么呢? .....	145
05.10: 对简单梁结构进行激振器测试, 但一些模态看起来不正确, 为什么? .....	147
05.12: 锤击法测量带宽应与感兴趣的频率范围相匹配吗? .....	149
06.02: 大阻尼模态在 FRF 中不可见时, 还能提取到这些模态参数吗? .....	152
06.04: 测试设置和刚体模态对感兴趣的高阶弹性模态有什么影响? .....	155
06.06: 模态测试用 2KHz 进行激励, 但只分析到 500Hz, 是否有问题? .....	158
06.08: MAC 值多少合理, 以便确定我的模型是正确的? .....	161
06.10: 有人告诉我工作模态分析产生的结果更优, 阻尼更真实。.....	164
06.12: 什么是 MRIT? 锤击法测试时, 我听到人们谈论它。.....	167
07.02: 所有的模态指示函数有什么不同之处? 他们分别起什么作用? .....	170
07.04: 怎样选择模态参考点位置? 需要考虑什么? .....	173
07.06: 怎样解释稳态图? 数据点是怎样影响拟合的? .....	176
07.08: 稳态图有 MMIF 和 CMIF 不能指示的极点, 他们是真实模态吗? .....	179
07.10: 结构普遍使用螺栓连接, 它对结构频率改变影响显著吗? .....	182
07.12: 有时模态振型跟预期相比旋转了一定角度, 是虚假模态吗? 怎么回事? .....	184
08.02: 所有的模态软件都需要参考 DOF, 为什么 FFT 分析仪的参考又不同? .....	187
08.04: 需要使用更多残余项以改善曲线拟合吗? 这样看起来结果更好。.....	190
08.06: 锤击法测试中一些测点的相干好于其他的, 我什么地方出错了吗? .....	193
08.08: 加速度计没有过载, 但测量却很糟糕。什么地方出错了? .....	196
08.10: 二次连击是不希望出现的。多次连击呢? .....	199
08.12: 能描述一下互易性吗? 我还是不理解。.....	202
09.02: 我们真的需要一个精确的校正过的模型吗? 模型不完美有什么影响? .....	205
09.04: 我对自由-自由系统进行刚度修改, 弹性模态降低了, 为什么? .....	208

09.06: 改变悬臂梁自由端的刚度, 只能使频率移动一定距离, 怎么回事? .....	210
09.08: 激振器激励与整体坐标系成一定角度, 怎样将激励力分解到各个方向? .....	212
09.10: 传递函数沿频率轴估计时, 阻尼为 0, 这是否意味着系统没有阻尼? .....	215
09.12: 曲线拟合像个巫术, 能为我解释传递函数、FRF 和估计的参数吗? .....	218
10.02: 锤击测试使用不同的锤头轻锤或重锤是否有影响? .....	221
10.04: 激振器顶杆对 FRF 测试是否有影响? .....	223
10.06: 我仍然不清楚单自由度在模态空间与物理响应的关系? .....	226
10.08: 我一直听说模态参与, 到底是什么意思? .....	229
10.10: 测试得到了一些预期之外的模态。难道整个测试设置有影响? .....	232
10.12: 支承机理对 FRF 测量有影响吗? 橡皮绳和鱼线悬挂会不同吗? .....	235
11.02: 锤击测量中间需要暂停久些吗? 指数窗能解决这个问题吗? .....	237
11.04: 为什么不用大推力激振器测试, 而只需“调大信号”即可呢? .....	240
11.06: MIMO 和 SISO 模态试验真的有差异吗? .....	243
11.08: 模态参数识别使用多参考点和单参考点真的有区别吗? .....	246
11.10: 有人告诉我, 力谱衰减超过 20dB, FRF 就不能接受。 .....	249
11.12: 有时出现连击时, 换个锤头就可消除连击, 这样做正确吗? .....	251
12.02: 某天做的测量与另一天的测量看起来不同, 这是怎么回事? .....	254
12.04: 对比测试与完全固定的分析模型, 实验室里能模拟完全固定的模型吗? .....	256
12.06: 如果不在结构的固有频率处激励, 怎能知道固有频率是多少? .....	259
12.08: 测试需要多自由的边界条件? 这真的重要吗? .....	261
12.10: 驱动点 FRF 到底是什么? 你必须精确锤击同一点吗? .....	263
12.12: 校正了复合平板模型, 但属性不符合实情情况。模型能用于响应研究吗? .....	266
13.02: 你能再次解释复模态指示函数 (CMIF) 吗? 这些交叉频率是什么? .....	269
13.04: 如果试验与分析模型频率相近, 那么模型是相关的吗? 必须考察振型吗? .....	272
13.06: 真的需要测量 FRF 吗? 是否测量传递率就行? .....	275
13.08: 如果我们移动力锤进行测试, 并锤击了许多测点, 有可能会丢失模态吗? .....	278
13.10: 如果锤击一个节点, 那么其它点是不是没有响应? .....	281
13.12: 有人告诉我他们锤击测试使用汉宁窗。这似乎不正确, 会使数据失真吗? .....	284
14.02: 特征值求解告诉我们频率, 但我们怎么得到模态振型? .....	287
14.04: 需要在所有位置安装三向加速度计吗? .....	290
14.06: 频率测试时重力起作用吗? 测试结构的方向有影响吗? .....	293
14.08: 我仍然对 MAC 感到困惑, 多少算是一个“好的”MAC 值。 .....	296
14.10: 实现自由-自由边界的最佳方式是什么, 因为没有真正的自由-自由。 .....	298
14.12: 在结束“模态空间”系列文章之前, 你最后还能提供一些建议吗? .....	301

# 实验模态分析

(非数学角度的简单综述)

Peter Avitabile

美国马萨诸塞州立大学洛威尔校区机械工程系模态分析和控制实验室



## 前言

人们经常会问一些有关模态分析和结构如何振动方面的简单问题。大多数时候，为了解释清楚这些概念，会强调一些基础的潜在理论，不可能只是简单地描述。然而，很多时候，涉及的理论有一点点多，即使没有严格的数学描述，也可以说明一些概念。本文试图去解释与结构振动相关的一些概念和处理结构动力学问题的一些相关工具的使用。本文的最终目的是从非数学角度出发，简要地说明结构是怎样振动的。

言归正传，让我们开始人们通常会问的第一个问题。



## 可以为我解释一下模态分析吗？

简单地说，模态分析是一种处理过程，是根据结构的固有特性，包括频率、阻尼和模态振型，这些动力学属性去描述结构的过程。那是一句总结性的语言，现在让我来解释模态分析到底是一个怎样的过程。不涉及太多技术方面的知识，我经常用一块平板的振动模式来简单地解释模态分析。这个解释对于那些振动和模态分析的新手们通常是有用的。

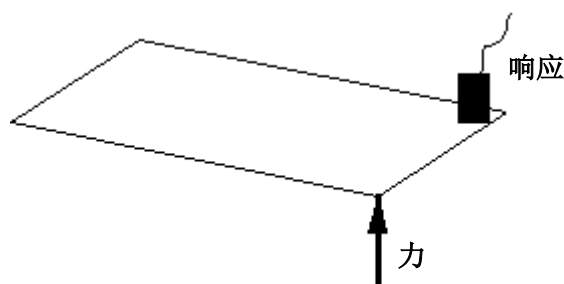


图1 平板激励/响应模型

考虑自由支撑的平板，如图1所示。在平板的一个角点施加一个常力，由静力学知识可知，静态力会引起平板的一些静态变形。但是在这儿我想施加的是一个按正弦变化的力。改变此力的振荡频率，但是力的峰值保持不变，仅仅是改变力的振动频率。同时在平板另一个角点安装一个加速度传感器，测量由此激励力所引起的平板响应。

逐渐增加力的振动频率

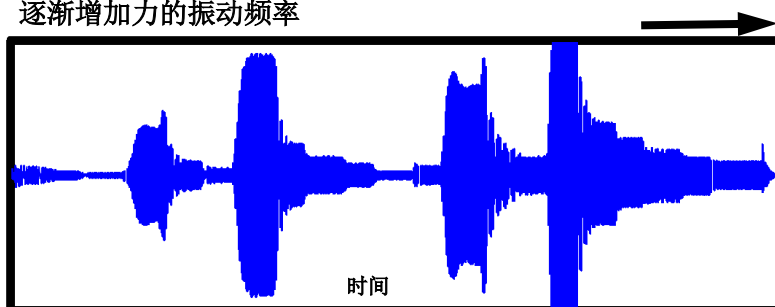


图2 平板的响应

现在如果我们测量平板的响应,将会注意到平板的响应幅值随着激励力的振动频率的变化而变化,如图 2 所示。随着时间的推进,响应幅值在不同的时刻有增也有减。**这似乎很怪异**,因为我们在此系统上施加了一个常力,而响应幅值的变化却依赖于激励力的振动频率。具体体现在,当我们施加的外力的振动频率越来越接近系统的固有频率(或者共振频率)时,响应幅值会越来越大,当激励力的振动频率等于共振频率时达到最大值。想想看,真令人大为惊讶,因为施加的外力峰值始终不变,而仅仅是改变其振动频率!

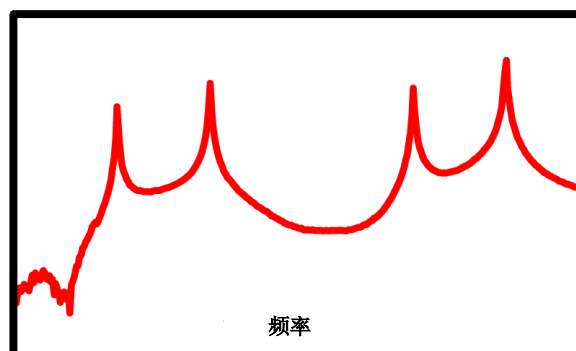


图 3 平板的频响函数

时域数据提供了非常有用的信息,但是如果用快速傅立叶变换 (FFT) 将时域数据变换到频域,可以计算出所谓的频响函数,如图 3 所示。这个函数有一些非常有趣的信息值得关注:可以看到频响函数的峰值出现在系统的共振频率处,注意到频响函数的峰值出现在这样的频率处,此处观测到的时域响应信号的幅值达到最大值,这些频率等于输入激励力的振动频率。

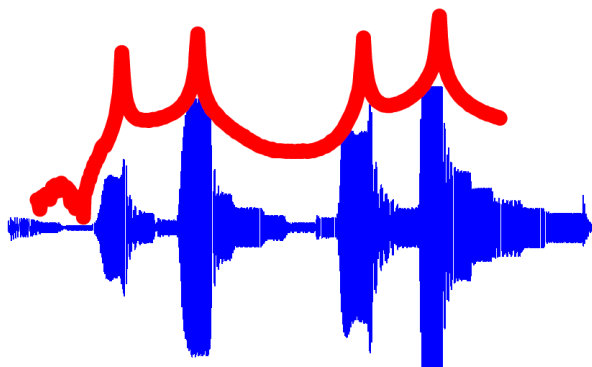


图 4 频响函数叠加在时域信号上

现在如果我们将频响函数叠加于时域波形之上,会发现时域波形幅值达到最大值时的振动频率等于频响函数峰值处的频率,如图 4 所示。所以你能明白,可以使用时域信号出现最大幅值时确定系统的固有频率,也可以使用频响函数确定这些固有频率。显然频响函数更易于确定系统的固有频率。

现在很多人会惊奇结构怎么会有这些固有特征,而更让人惊奇的是在这些固有频率处,结构变形图也具有多种不同的形状,且这些形状取决于激励力的频率。

现在让我们了解结构在每一个固有频率处的变形图。在平板上均匀布置 45 个加速度计,用于测量平板在不同激励频率下的响应幅值。如果激励力频率驻留于结构的每一个固有频率,会发现结构在每个固有频率处存在特定的变形图,如图 5 所示。图 5 表明当激励频率与系统的某一阶固有频率相等时,结构就产生相对应的变形图。当在第 1 阶固有频率处驻留时,平板产生了第 1 阶弯曲变形,在图中用蓝色表示 (1 阶模态)。在第 2 阶固有频率处驻留时,平板产生了第 1 阶扭转变形,在图中用红色表示 (2 阶模态)。分别在结构的第 3 和第 4 阶固有频率处驻留时,平板产生了第 2 阶弯曲变形和第 2 阶扭转变形,在图中分别用绿色 (3

阶模态) 和洋红色表示 (4 阶模态)。这些变形图称作结构的模态振型。(从纯数学立场讲, 这实际上并不完全正确, 但是在这儿仅作为简单的讨论, 从现实立场讲, 这些变形图和模态振型非常接近。)

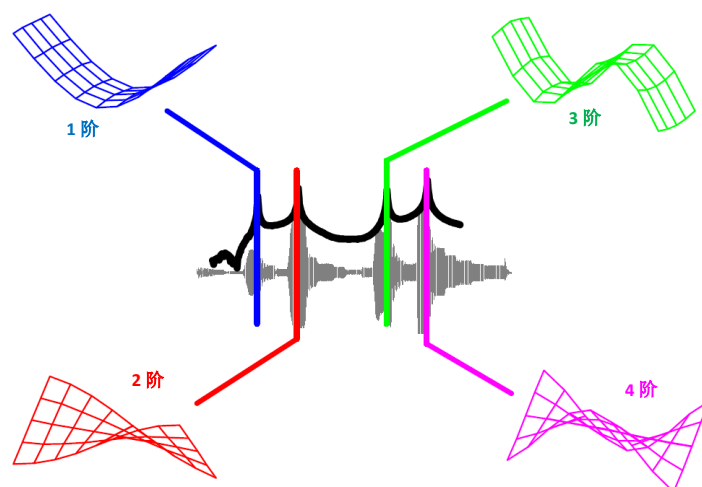


图 5 平板的正弦驻留响应

在我们设计的所有结构中, 都存在这些固有频率和模态振型。本质上, 这些特征依赖于确定结构固有频率和模态振型的结构质量和刚度分布。作为一名设计工程师, 需要确定这些频率, 并且知道当有外力激励结构时, 它们将怎样影响结构的响应。当结构受到激励时, 明白结构模态振型和结构将怎样振动有助于设计工程师设计出更优的结构。模态分析有太多需要讲解的地方, 这仅仅是一个非常简单的解释。

因此, 本质上讲, 模态分析是结构固有特征研究。明白固有频率和模态振型, 对噪声和振动方面应用的结构系统设计有帮助。我们使用模态分析帮助设计所有类型的结构, 包括机动车、飞行器、太空飞船、计算机、网球拍、高尔夫球杆……这些例子举不胜举。

现在我们已经介绍了这样的测量叫频响函数, 但是它到底是什么呢?



## 频响函数到底是什么?

**频响函数仅仅是结构的输出响应和输入激励力之比。**我们同时测量激励力和由该激励力所引起的结构响应 (这个响应可以是位移、速度或加速度)。将测量的时域数据通过快速傅立叶算法, 从时域变换到频域。这个快速傅立叶变换存在于信号分析仪和计算软件包中。

经过变换, 频响函数最终呈现为复数形式, 包括实部和虚部, 或者是幅值和相位。让我们考察频响函数的一些特征, 并且试图确定怎样从这些测量函数中提取模态数据。

首先, 让我们考察一根只有 3 个测量位置的悬臂梁, 如图 6 所示。我们可以看到下面这根梁有 3 个测量位置和 3 阶模态振型。这根梁有 3 个可能的力作用位置, 也有 3 个可能的响应测量位置, 这意味着可能获得总共 9 个复数值的频响函数。不同位置的频响函数通常用不同的下标加以描述, 下标表明了输入和输出位置, 形如  $h_{\text{输出, 输入}}$  (或者用矩阵典型表示形式, 可表示为  $h_{\text{行, 列}}$ )。

图 6 给出了频响函数矩阵的幅值和相位与实部和虚部。(当然, 我们知道复数由实部和虚部组成, 并且可以轻易地转换成幅值和相位。既然频响函数是复数, 那么我们就可以考察描述频响函数的任一个组成部分和所有部分。)

现在让我们考察频响函数的每个组成部分 (幅值与相位, 实部与虚部), 并且对频响函数的一些组成部分进行评论总结。



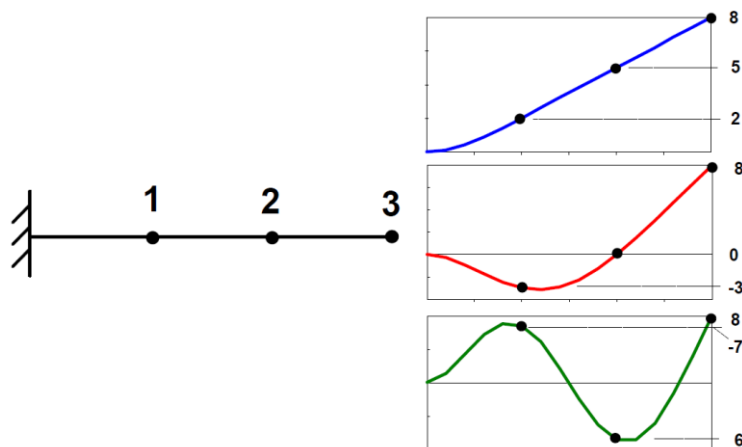


图 6a 3DOF 的悬臂梁模型

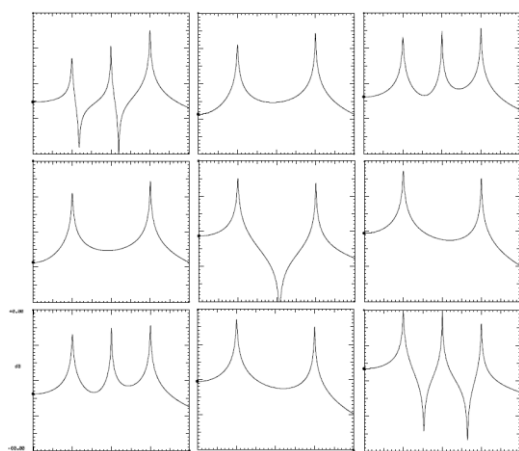


图 6b 幅值

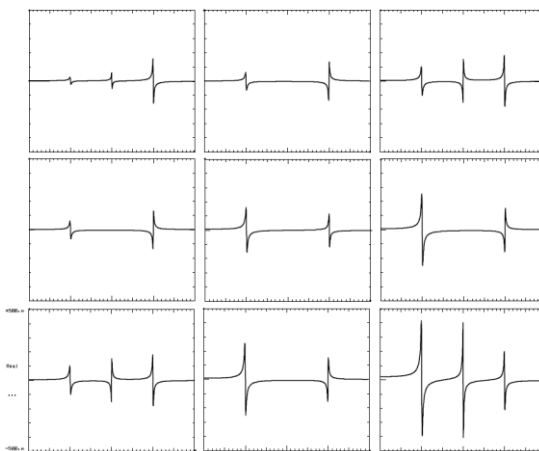


图 6d 实部

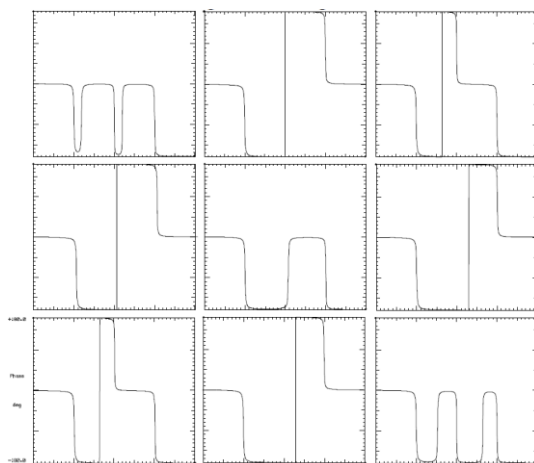


图 6c 相位

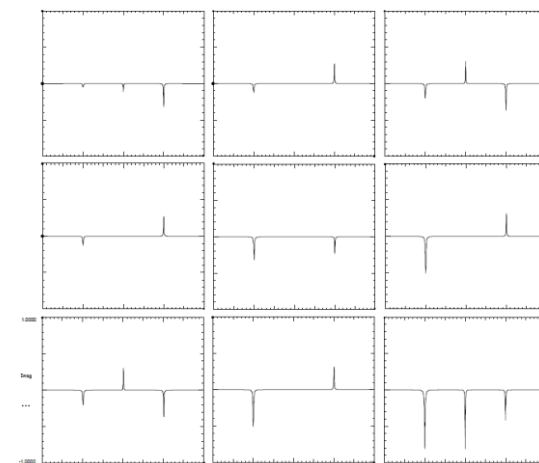


图 6e 虚部

首先让我们在梁的端部位置 3 处用力锤激励，同时在该位置测量响应，如图 7 所示。此次测量的 FRF 称作为  $h_{33}$ ，这个特殊的 FRF 称作为驱动点 FRF。驱动点 FRF 具有一些重要的特征：

- 幅值曲线图中共振点（峰）和反共振点（峰）交替出现；
- 每经过一个共振点（峰）相位滞后 180 度，每经过一个反共振点（峰）相位超前 180 度；
- 频响函数的虚部所有峰值方向相同。

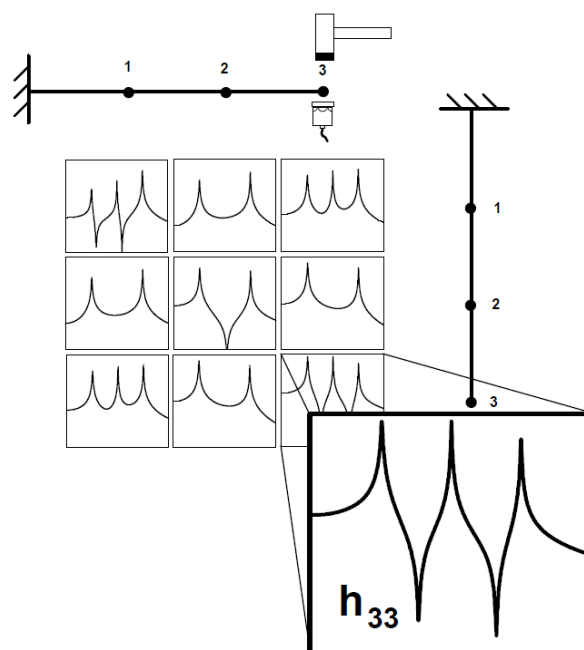


图 7a 参考点 3 的驱动点频响函数

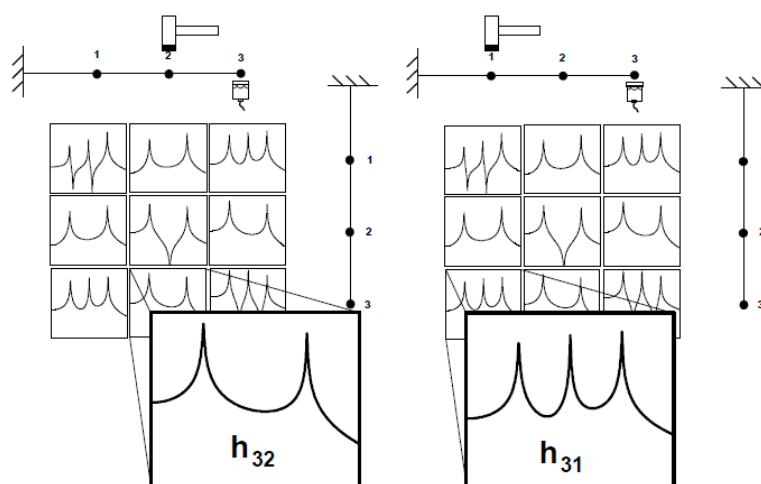


图 7b 参考点 3 的跨点频响函数

接着力锤移动到 2 点进行激励，测量 3 点的响应，然后移动力锤到 1 点，仍然测量 3 点的响应，得到另外两个频响函数，结果如图 7 所示（当然也可以继续采集任意一点或者所有点的输入-输出组合）。

因此，现在我们对可能能够获得的频响函数有了一定的了解。其中值得注意的重要一项是频响函数矩阵是对称的，这是因为描述系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵是对称的。故我们可以看出  $h_{ij}=h_{ji}$ ，这称作互易性。因此，我们实际上不需要测量频响函数矩阵所有元素。

似乎总会出现这样一个问题：是否有必要测量所有可能的输入-输出组合，为何从频响函数矩阵的一行或一列就可能得到模态振型。



## 为何只需要频响函数矩阵的一行或一列？

理解由频响函数矩阵的各种不同元素获得模态振型对我们来说非常重要。在这不涉及数

学层面的知识，让我们来讨论这一点。

首先让我们考虑频响函数矩阵的第三行，并且只专注第 1 阶模态。如果观察频响函数虚部的峰值振幅，很容易就能得到结构的第 1 阶模态振型，如图 8a 所示。因此，由测量数据提取模态振型似乎相当直观。一种快速但又粗糙的方法就是在不同的测点处仅仅测量频响函数虚部的峰值振幅。

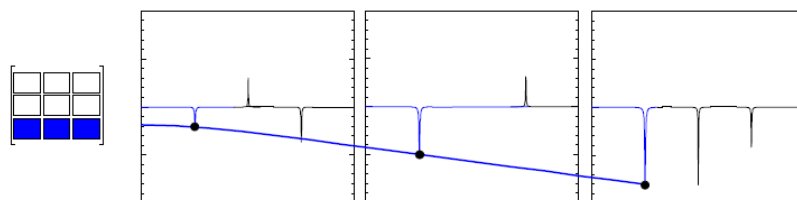


图 8a 由频响函数矩阵第三行提取第 1 阶模态

接着考虑频响函数矩阵的第二行，并且也只专注第 1 阶模态，如图 8b 所示。如果观察频响函数虚部的峰值振幅，从这一行也很容易得到第 1 阶模态振型。

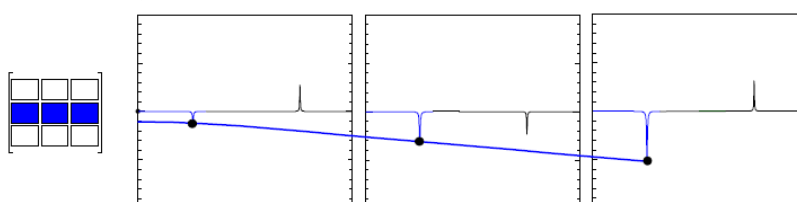


图 8b 由频响函数矩阵第二行提取第 1 阶模态

我们同样可以从频响函数矩阵的第一行得到这一阶模态振型。这是理论所表达的内容的一种简单示意性的描述。我们可以使用频响函数任一行去描述系统的模态振型。故很显然，这些函数包含的信息与系统模态振型相关。

现在让我们再次考虑频响函数矩阵的第三行，并且只专注第 2 阶模态，如图 8c 所示。如果还是观察频响函数虚部的峰值振幅，可以很容易得到第 2 阶模态振型。

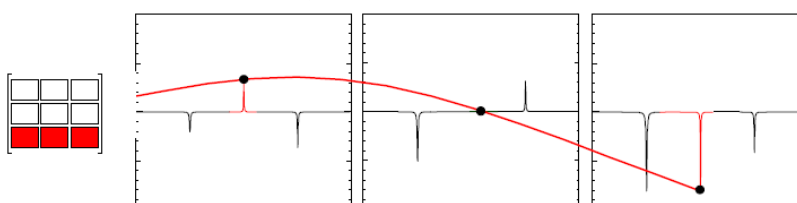


图 8c 由频响函数矩阵第三行提取第 2 阶模态

而观察频响函数矩阵的第二行，并且也只专注第 2 阶模态。此时会有点惊奇，因为这一行没有第 2 阶模态可用的虚部幅值，如图 8d 所示。这是不希望出现的，但是如果我们考察第 2 阶模态振型，很快就会发现位置 2 是第 2 阶模态的节点。此时参考点位于模态节点上。

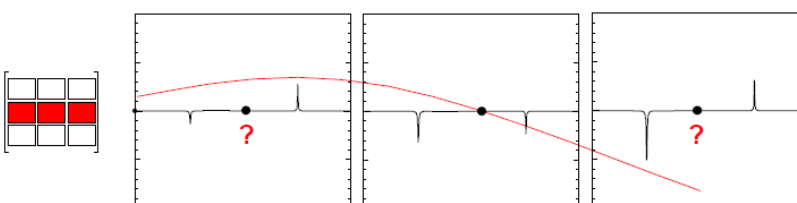


图 8d 由频响函数矩阵第二行提取第 2 阶模态

这就指出了模态分析和实验测量中一个非常重要的方面：**参考点不能位于模态节点上，否则这阶模态在频响函数中将不可见，并且得不到这阶模态振型。**

在这我们仅用了 3 个测点去描述这根悬臂梁的模态。如果我们增加更多的输入-输出测量位置，就能得到更光顺的模态振型，如图 9 所示。图 9 显示了 15 个频响函数，其中前面讨论的 3 个测点的频响函数高亮突出显示。图中显示的 15 个频响函数用瀑布图式样绘出。

利用这种绘图方式，通过观察频响函数的虚部峰值能更容易地确定模态振型。

目前为止，我们所讨论的测量已由锤击法测试得到。如果我们使用激振器测试，那么测量的频响函数会是什么样的呢？

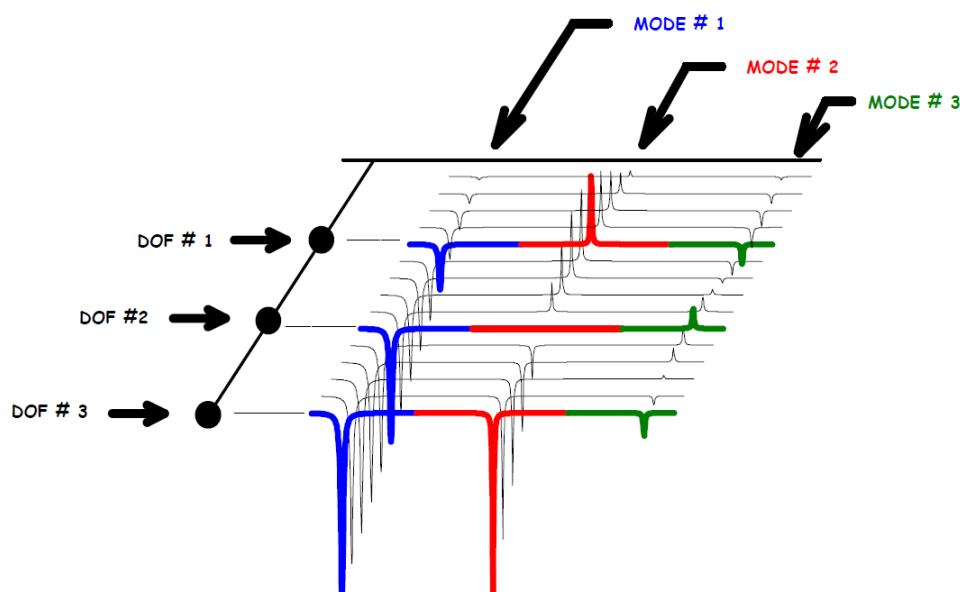


图9 瀑布图显示悬臂梁的频响函数



## 锤击法和激振器测试有什么不同之处？

从理论角度讲，频响函数是由激振器测试得到还是由锤击法测试得到，并没有什么本质区别。图 10a 和 10b 给出了由锤击法测试和激振器测试得到的频响函数。**锤击法测试通常测量频响函数矩阵的一行，而激振器测试通常测量频响函数矩阵的一列。**因为描述系统的频响函数矩阵是对称的方阵，故互易性是成立的。比如前面讨论的例子，频响函数矩阵的第三行与第三列是完全相同的。

理论上讲，激振器测试和锤击法测试没有差异，但那仅仅是理论观点！假如我们能够对结构施加一个纯外力，外力与结构二者之间没有任何相互作用，并且用一个无质量的传感器测量响应，这样传感器对结构没有任何影响，那么上述描述是正确的。但是如果不是这种情况，结果又将怎样呢？

现在让我们从现实角度出发，考虑实际进行的测试。观点就是在模态测试过程中，激振器和响应传感器通常对结构有影响。需要记住的主要一项是处于测试下的结构已不再是你最初想获得模态参数的那个结构了。因为在结构上已附加了涉及数据采集的东西：结构悬挂系统、安装的传感器的重量、激振器推力杆/顶杆的潜在刚度影响等等。因此，虽然理论告诉我们，锤击法测试和激振器测试不存在任何差异，但现实中因数据采集方面的原因，二者经常存在差异。

激振器测试过程中，最明显的差异是由移动加速度计引起的。加速度计的质量相对于结构的总质量可能非常小，但是它的质量相对于结构不同部分的有效质量可能又非常大。多通道测试系统，这个问题更加突出，为了获得所有的频响函数，许多加速度计在结构上移动。这会是个问题，特别是对于轻质结构。纠正此问题的方法之一是在结构上安装所有的加速度计，即使一次测量只用到少数几个加速度计。另一个方法是在非测量位置上安装与加速度计质量相等的质量哑元，这将能消除移动的质量效应。

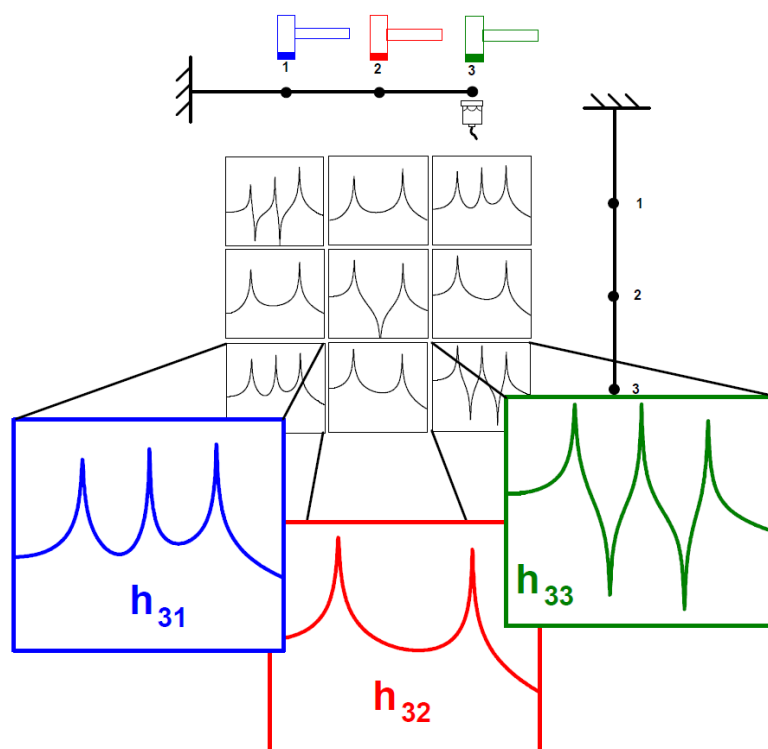


图 10a 移动力锤测试情景

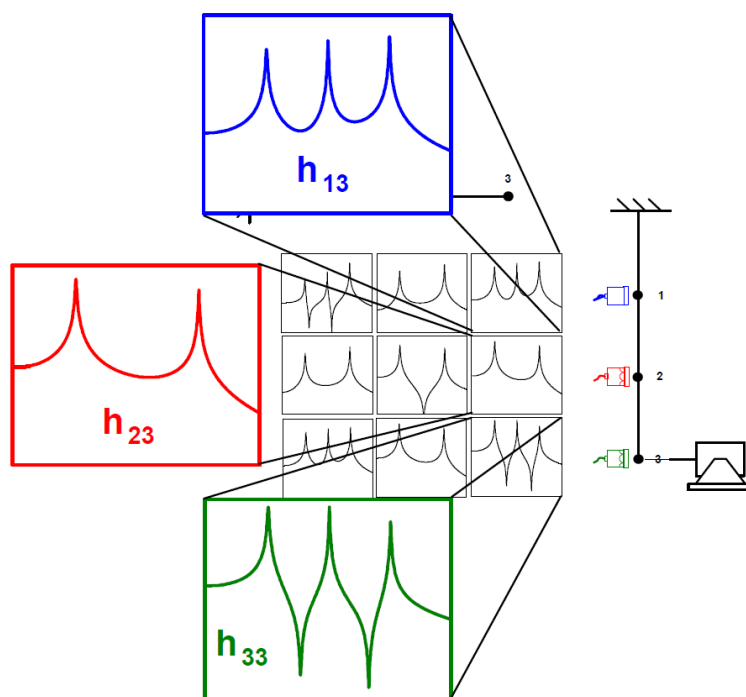


图 10b 移动响应传感器的测试情景

另一个差异在于激振器推力杆带来的影响。本质上，结构的模态受激振器附属装置的质量和刚度的影响。虽然我们试图将这部分影响减少到最低程度，但是它们仍然存在。激振器推力杆的作用是分离激振器对结构的影响。然而，多数结构，激振器附属装置的影响仍然显著。因为锤击法测试不会遭受这些问题，所以可能会得到的不同的结果。因此，虽然理论上讲激振器测试和锤击法测试二者不存在差异，但一些非常基本的现实因素却引起了一些差异。





## 计算 FRF 实际需要测量什么？

实验模态分析中最重要的是测量频响函数。简单地说，频响函数是输出响应与输入激励力之比。通常使用专门的仪器，如 FFT 分析仪或者具有 FFT 功能的软件的数据采集系统，获得频响函数。

现在让我们简要地讨论为获得 FRF 所进行的数据采集的一些基本步骤。首先，从传感器得到的信号为模拟信号，必须对这些模拟信号进行滤波处理，以确保没有高频成分混叠到分析频率范围内。通常实现的方法是在分析仪前端使用一组模拟滤波器，称为抗混叠滤波器，它们的功能是移除信号中可能存在的高频信号。

下一步是将模拟信号转化成数字信号。这一步由模/数转换器（ADC）实现。典型的数字化过程使用 10 位、12 位或 16 位的 AD 转换器（现在普遍使用 24 位的 ADC，译者注），可用的 AD 位数越高，信号数字化的分辨率就越高。一些主要关心的方面是采样误差和量化误差可能潜在地被引入到数字化近似过程中。采样速率控制着信号的时间分辨率和信号的频率描述，量化与采集到的信号的幅值精度相关。在测量数据过程中，采样和量化能引起一些误差，但是这些误差远没有信号处理过程中最糟糕的误差——泄漏，所造成的误差严重。

泄漏出现在将时域信号通过快速傅立叶变换（FFT）变换成频域的过程中。傅立叶变换要求捕捉到的信号为全部时间段（时间从 $-\infty$ 到 $+\infty$ ）的完整信号，或周期信号。当条件满足时，傅立叶变换将在频域产生数据合适的描述。然而，当条件不满足时，泄漏将在频域引起数据描述严重失真。为了将泄漏引起的失真减少到最小程度，可使用称为窗的加权函数，可使时域信号似乎更好地满足 FFT 变换的周期性要求。虽然窗函数能大大地减少泄漏造成的影响，但是并不能彻底消除泄漏。

一旦采集到时域数据，经过 FFT 计算后将得到输入激励和输出响应的线性频谱。通常，对由线性频谱得到的功率谱进行平均。需要计算的平均谱主要是输入功率谱和输出功率谱，以及输出和输入信号的互谱。

对这些函数进行平均，用来计算获取模态数据的两个重要的函数：频响函数（FRF）和相干函数。相干函数作为数据质量评判工具，确定有多少输出信号与测量的输入信号相关。频响函数包含的信息与系统的频率和阻尼有关，一组频响函数包含的信息与系统在测量位置的模态振型值相关。这是实验模态分析中最重要测量，前面所讲的这些步骤的概述，如图 11 所示。

当然，测量数据采集包括许多重要的方面，如平均技术用于减少噪声等等，这些都超出了这个描述的范畴。任何一本好的数字信号处理参考书都能提供这些方面的知识。接下来需要讨论输入激励。基本上，实验模态分析有两类常用的激励方式：锤击法激励和激振器激励。

现在让我们考虑当进行锤击法测试时需要考虑的测试注意事项。

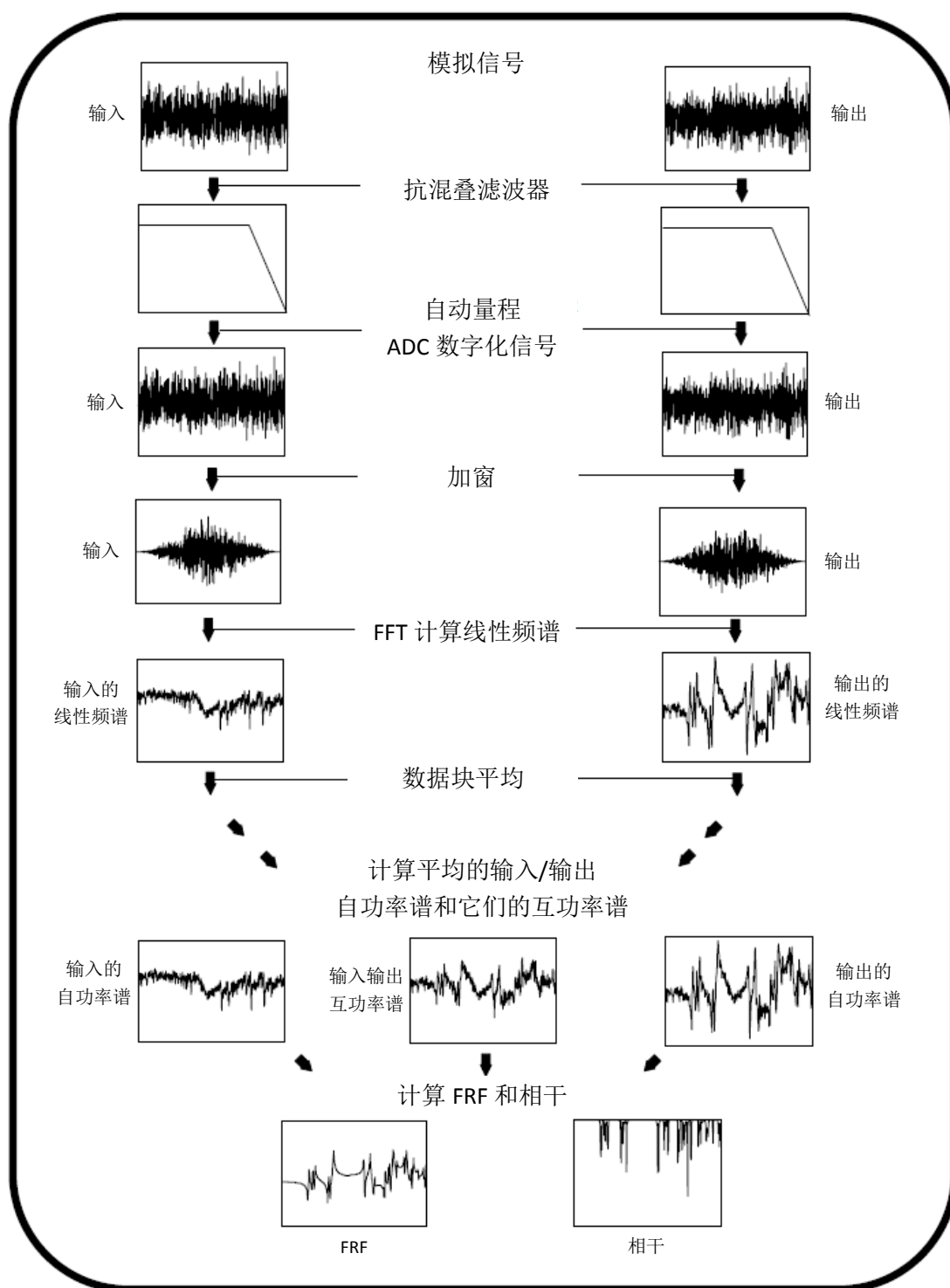


图 11 剖析 FFT 分析仪



## 锤击法测试最需要考虑什么？

进行锤击法测试时，有很多重要方面需要考虑。但在这儿仅提及其中最关键的两项，与锤击法测试有关的所有方面的详细介绍远远超出了本篇文章的范畴。

首先，锤头的选择对测量有重大影响。输入激励的频率范围主要受锤头的硬度控制，锤

头越硬，输入激励所激起的频率范围越宽。锤头选择要确保在考虑的频率范围内能激起所有感兴趣的模态。为了获得高质量的测量，如果选择的锤头太软，就不能充分激起所有这些模态，如图 12a 所示。图中输入功率谱没能激起显示的频率范围内的所有模态，从图中输入功率谱的衰减可以明显证明这一点。在频率范围的后半段，相干和频响函数的质量都明显变差了。

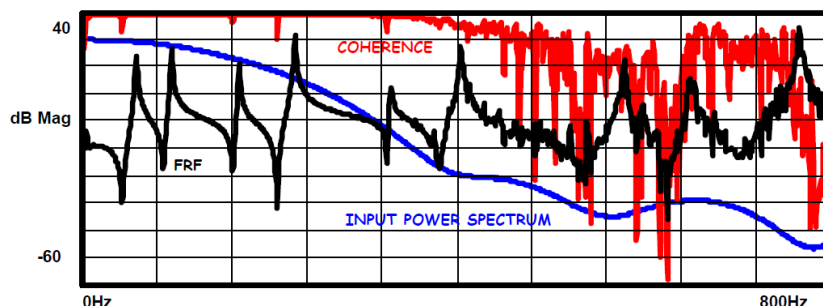


图 12a 选择的锤头不足以激起所有模态

通常，我们力图得到一个相当好并且相对平坦的输入激励频谱，如图 12b 所示。改善的相干函数表明测量的频响函数质量更高。当进行锤击试验时，必须不断试锤，以确保选择合适的锤头，这样才能激起所有感兴趣的模态，得到高质量的频响函数。

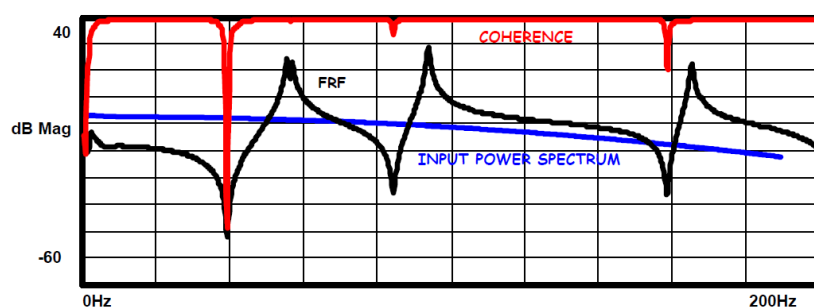


图 12b 选择的锤头充分激起了所有模态

锤击试验第二个重要的方面与响应信号窗函数的使用有关。通常，对于小阻尼结构，锤击激起的结构响应在采样时间长度的末端不会完全衰减到零。这种情况下，变换后的数据将遭受到严重的数字信号处理的影响，这种影响称为泄漏。

为了将泄漏减少到最低程度，需要对测量数据施加称为窗的加权函数。窗函数的使用强制数据更好地满足傅立叶变换的周期性要求，可将由泄漏带来的失真影响降到最低。对于锤击激励，响应信号最常用的窗函数是指数衰减窗。窗函数的使用将使得泄漏减少到最小程度，如图 13 所示。

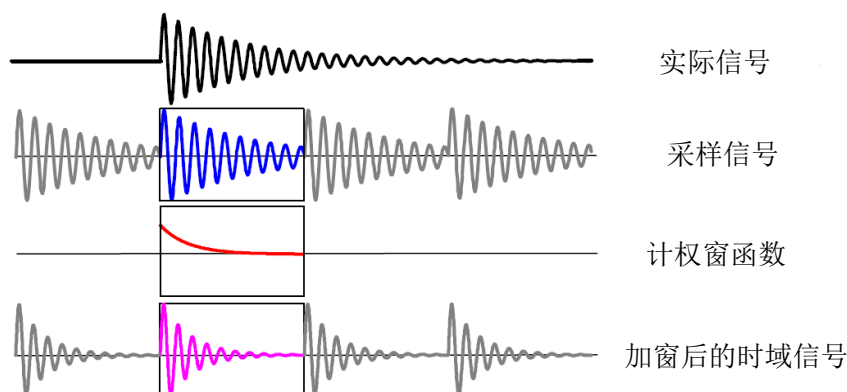


图 13 指数窗最小化泄漏影响

窗函数减少泄漏的同时，会导致数据本身一些失真，因此，只要可能应尽量避免使用窗函数。对于锤击法测试，有两个方面总需要仔细考虑：选择更窄的测量带宽和提高谱线条数。这些信号处理参数都会增加测量采样时间。这将倾向于减少指数窗的使用需求和倾向于总是考虑减少泄漏所带来的影响。

现在让我们考虑进行激振器测试时，需要考虑的测试注意事项。



## 激振器测试最需要考虑什么？

激振器测试时，同样有许多方面需要考虑。但是在这些因素中，最重要的是激励信号的激励效果，要求将窗函数的使用降到最低或者完全不需要使用窗函数。激振器测试时，还有许多其他考虑事项，但是所有这些方面的详细介绍已远超出了本节的讨论范畴。

直到今天，由于易于实现，随机激励仍是更普遍使用的激励技术。然而，由于激励信号的自身特性，泄漏仍是考虑的关键因素，因此常常施加汉宁窗减少泄漏。即使加窗以后，泄漏影响仍然很严重，使得测量的频响函数仍然失真。一个典型的加汉宁窗的随机激励信号，如图 14 所示。从图中可以看出，汉宁窗使得采样信号似乎更好地满足 FFT 变换的周期性要求，因而能减少由泄漏带来的潜在失真。

虽然加窗能改善因泄漏引起的 FRF 失真，但是窗函数并不能完全消除这些影响，这些 FRF 总是会存在一些因泄漏引起的失真。

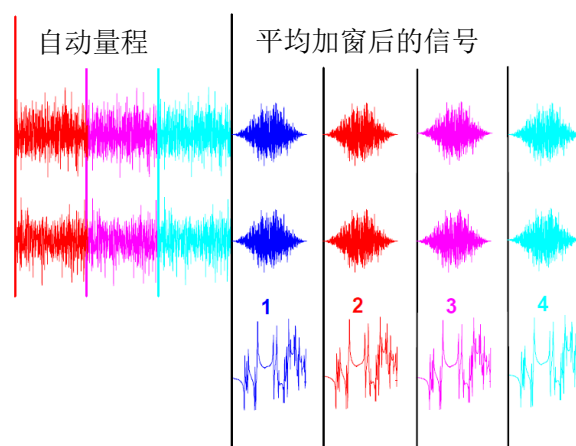


图 14 激振器测试-考虑激励信号：随机激励加汉宁窗

在今天仍被广泛使用的两个非常普遍的激励信号是猝发随机和正弦快速扫频。两种激励信号都有一个特别的特点：不需要给信号加窗函数，因为几乎在所有的测试情况中，这两个信号天性不存在泄漏。这两种激励信号使用起来相对简单，在当今大多数信号分析仪中，都非常常见。这两种信号如图 15 和图 16 所示。

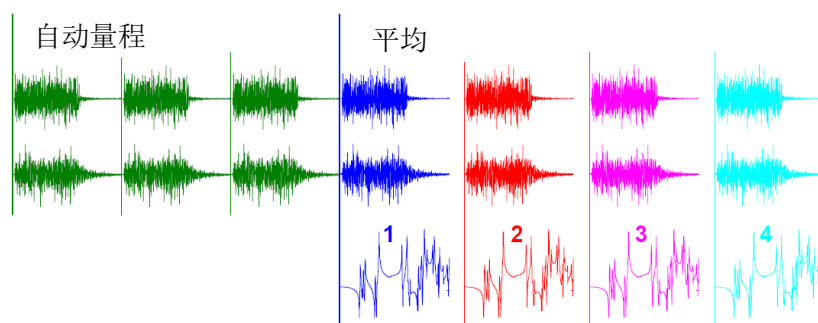


图 15 不加窗的猝发随机激励

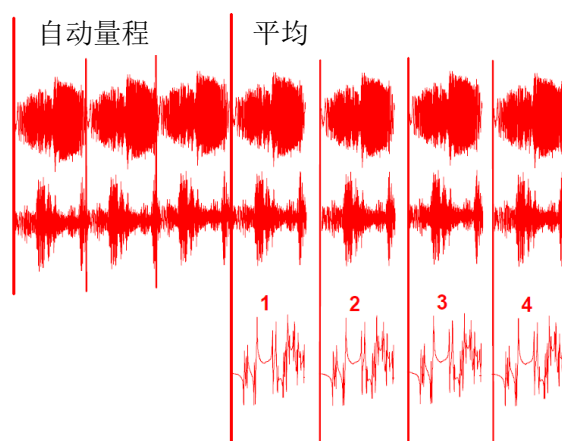


图 16 不加窗的正弦快速扫频激励

猝发随机，由于瞬态激励信号和响应信号在采样周期内能完全捕捉到，因而满足 FFT 变换的周期性要求。对于正弦快速扫频激励，激励信号在采样时间长度内重复出现，也满足 FFT 变换的周期性要求。尽管还存在其他一些激励信号，但是这两种激励信号是目前模态测试中最常用的。

到现在为止，我们对怎样进行测量已有了更深的认识。



**请告诉我窗函数的更多方面，它们似乎相当重要！**

在许多测量情况中，窗函数是一个必备的恶魔。虽然我根本不愿意使用任何窗函数，但泄漏确实让人难以接受，因而，不得不选择加窗。正如前面讨论的一样，有多种激励方法能提供无泄漏的测量，因而不需要使用任何窗函数。然而，很多时候，特别是现场实验和采集工作数据时，窗函数又是必须要使用的。那么，最常用的窗函数有哪些呢。

简而言之，当今最常用的窗函数是矩形窗、汉宁窗，平顶窗和力窗/指数窗。这些窗函数不作详细介绍，仅简单地说明在实验模态测试过程中，每种窗函数在何时应用。

矩形窗（也叫均衡窗、货车车厢窗和不加窗）是单位增益的加权函数，施加于一个数据块或数据纪录中所有数字化的数据。当采集的整个信号全部位于一个数据块内或数据纪录内，或者保证信号满足 FFT 处理的周期性要求时，通常加矩形窗。矩形窗可用于锤击法测试，但要求输入信号和响应信号在一个采样纪录内能完全观测到。矩形窗也用于激振器测试，此时要求激励信号为猝发随机、正弦快速扫频、伪随机和数字步进正弦，这些信号通常都满足 FFT 变换的周期性要求。

汉宁窗是个余弦状（钟状）的加权函数，强制采样时段的起始端和末端严重计权至零。这对那些不满足 FFT 变换周期性要求的信号非常有用。随机激励和通常的现场实验信号都属于这一类，因而要求加窗，加汉宁窗。

平顶窗对于不满足 FFT 处理周期性要求的正弦信号最为适用。实验模态分析中，相对于其他应用而言，这个窗函数经常用于校准目的。

锤击激励获得频响函数时，通常应用力窗和指数窗。总的来说，力窗是单位增益的窗函数，作用于脉冲激励发生的那部分时段。指数窗通常用于在采样时间长度内信号没有完全衰减到零的响应信号。指数窗的应用强制响应信号更好地满足 FFT 变换的周期性要求。

每个窗函数对数据的频域描述都有影响。一般而言，窗函数将降低函数峰值幅值的精度，并且使得最终得到的阻尼似乎比实际真实存在的阻尼要更大。尽管这些误差完全是不想要的，但相比泄漏造成的严重失真而言，它们还是更能让人接受。





## 从平板的频响函数怎样得到模态振型？

到现在为止，我们已经讨论了获得频响函数的各个方面，让我们再返回到先前讨论的平板结构中来，并对其进行一些测量。考虑在平板上布置 6 个测点，因而在平板上有 6 个可能的激励位置和 6 个可能的响应测量位置。这意味着总共能得到 36 个可能的输入输出频响函数。频响函数描述在外力作用下，平板将怎样响应。如果我们将力作用在 1 点，在 6 点测量响应，那么 1 点和 6 点的传递关系描述了系统的响应行为，如图 17 所示。通过峰值拾取法得到前两阶振型，分别如图 18 和 19 所示。

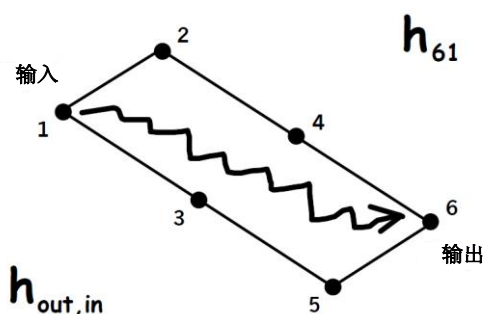


图 17 输入输出测量位置

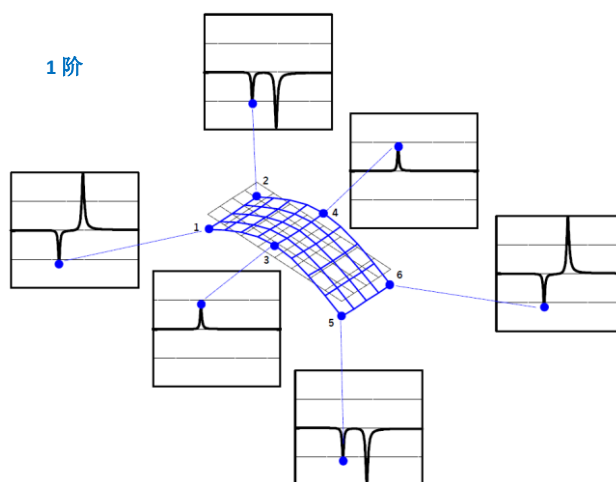


图 18 平板的 1 阶模态振型：FRF 的峰值拾取

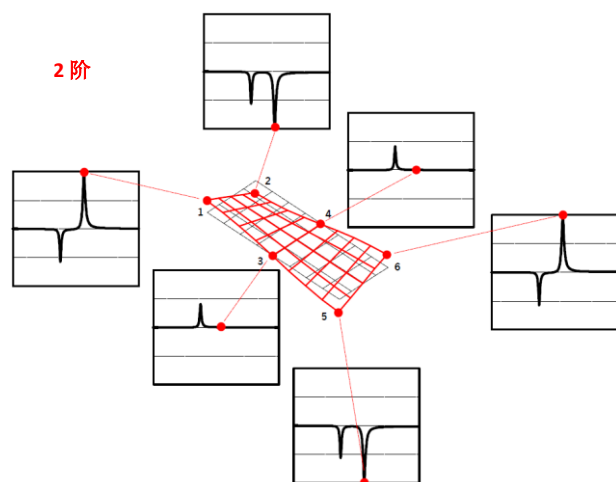


图 19 平板的 2 阶模态振型：FRF 的峰值拾取

尽管对非常简单的结构，如上所述的提取方法已经足够，但我们常常使用数学算法从测量数据中去估计模态参数。模态参数估计过程，通常称为曲线拟合，用计算机软件实现参数估计，简化了参数提取过程。从频响函数中提取到的基本模态参数为频率、阻尼和模态振型，这些动力学特征。测得的频响函数通常被分解成多个单自由度系统，如图 20 所示。

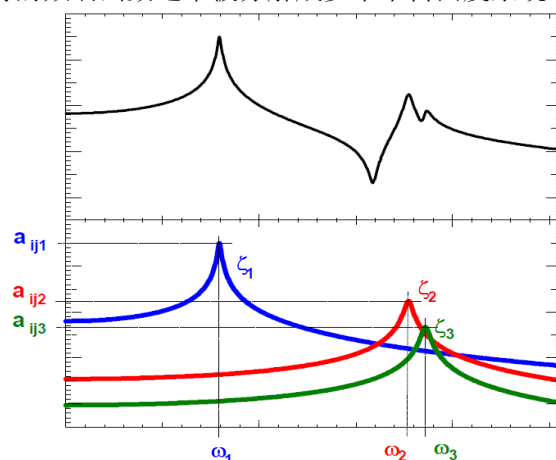


图 20 频响函数分解

曲线拟合采用多种不同的方法提取参数。某些技术利用时域数据，而另一些技术利用频域数据。最常用的方法是使用多模态分析模型，但是有时，在许多工程分析中，非常简单的单模态方法也能得到相当不错的结果，如图 21 所示。从根本上讲，所有的估计算法都试图将测量数据分解成组成测量数据的主要分量，也就是频率、阻尼和模态振型。

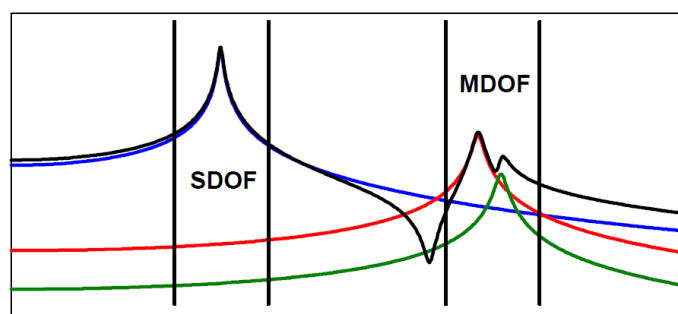


图 21 不同的频带使用不同的曲线拟合方法

拟合过程中，分析者必须为参数提取指定频率带宽，数据中包含的模态阶数和残余补偿项，如图 22 所示。

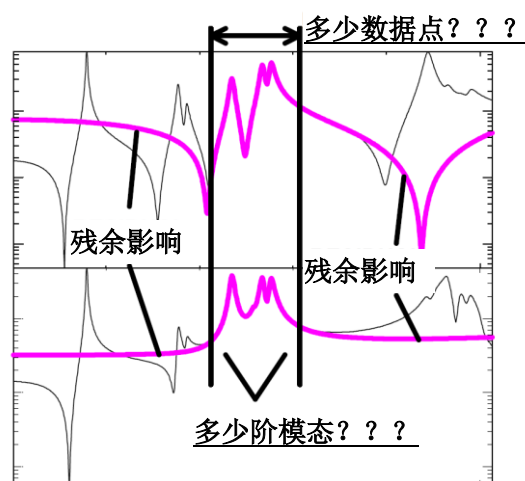


图 22 典型频响函数的曲线拟合

关于从测量数据中估计模态参数、可用的解密数据的工具以及提取模型的验证等，都需要作更详细地介绍，但这些已远超出了本篇文章的范畴。

所有结构对所施加的外力都有响应。但是很多时候这些力是未知的，或者很难测量。即使不测量力，但我们仍然可能要测量结构的响应。因此，下一个常见问题就是关于工作数据。



## 什么是工作数据？

我们首先需要认识到系统对施加在系统上的力有响应（不管此力能否测量到）。出于解释目的，我们暂且假设力是已知的。虽然施加的外力实际上是时域形式，但从频域上描述力和响应具有非常重要的数学优势。对于一个受到任意输入激励的结构而言，响应可通过频响函数乘以激励力函数计算得到，这很简单，如图 23 所示。

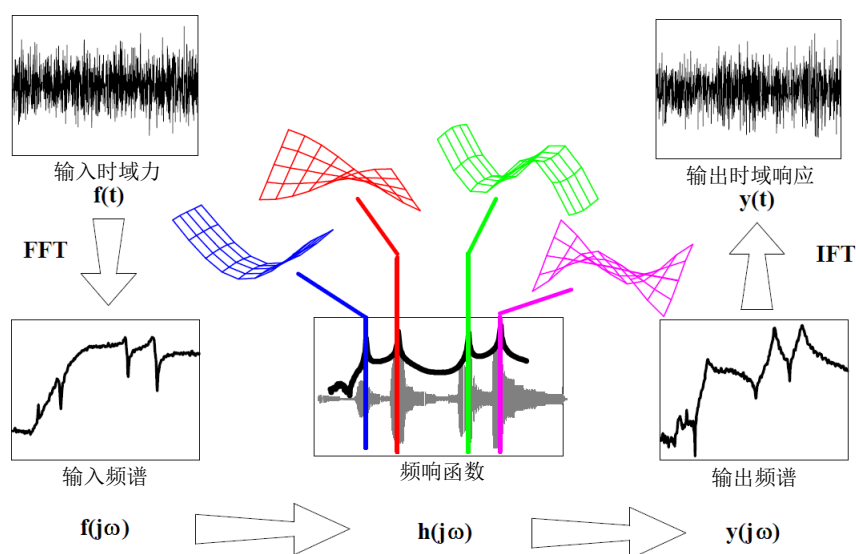


图 23 输入-输出结构响应问题的概况示意图

图中给出的激励是能激起结构所有频率的随机激励。最需要注意的是频响函数对引起响应的输入激励扮演了滤波器的角色。给出的激励信号能激起所有模态，因此，响应通常是那些输入力激起的所有模态的线性叠加。如果激励信号不包含所有的频率，仅能激起某一特定频率（当评估大多数工作状态时，这个频率通常是我们所关心的）时，将出现什么情况。

为了说明这一点，继续使用前面讨论过的平板例子。假设这个平板系统存在一些工作条件，考虑一个固定频率的运行不平衡方式作为激励。使用以前测量的同一组加速度传感器测量系统响应看来是合理的。如果我们采集数据，可以看到如图 24 所示的系统的变形图。观察这个变形，不清楚结构为什么会这样响应，或者什么改变了结构的响应。为什么平板变形如此复杂？这似乎不像我们以前测量得到的任何模态振型。

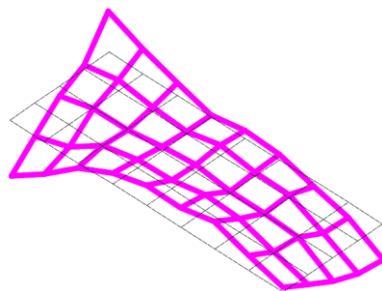


图 24 测量工作状态下的位移

为了明白这一点，让我们仍然以那块平板为例，在其一角点施加一个正弦激励。对于这个例子，我们只打算考虑平板的响应，假设这个正弦激励只激起了平板的前两阶模态（当然平板有很多阶模态，我们只是这样简单假设而已）。现在我们知道决定响应的关键因素是输入输出位置的频响函数。同样，我们需要记住的是当我们采集工作数据时，不测量作用在系统上的输入力，不测量系统的频响函数，仅仅测量系统的响应。

首先，我们用一个频率刚好等于平板第 1 阶固有频率的正弦信号激励该系统，系统的一条频响函数曲线如图 25 所示。即使我们仅仅是在一个频率处激励该系统，我们知道频响函数扮演了滤波器的角色，将决定结构如何响应。可以看出频响函数由 1 阶模态和 2 阶模态两者的贡献共同组成，也可以看出响应的主要贡献，不管是在时域还是频域，都是第 1 阶模态为主。假如我们只在那个频率处测量结构多个测点的响应，那么得到的系统的工作变形图看起来非常像 1 阶模态振型，但是里面含有少许 2 阶模态的贡献。记住，对于工作数据，我们从不测量输入力或者频响函数，仅仅测量输出响应。所以测量得出的变形是输入激励引起的结构实际响应，且不管是何种输入激励。

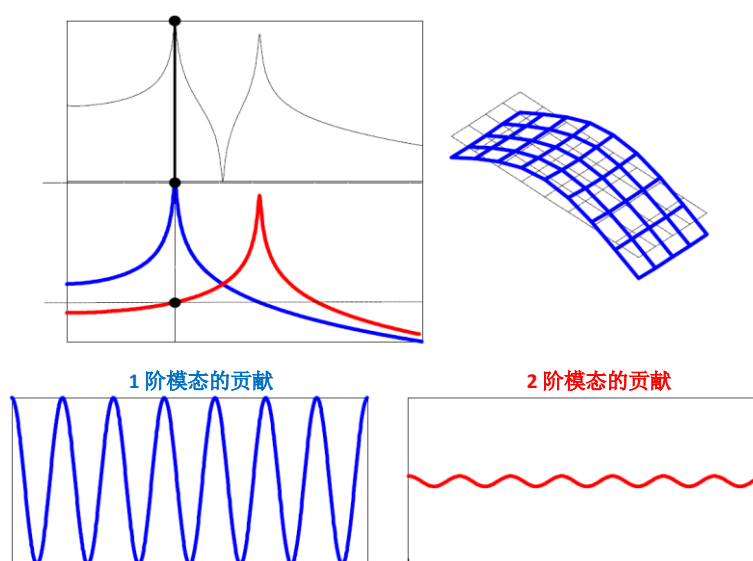


图 25 在 1 阶模态处激励

当我们测量频响函数和估计模态参数时，实际上是确定单独 1 阶模态对总的频响函数的贡献，如图中蓝线所示；确定单独 2 阶模态对总的频响函数的贡献，如图中红线所示；以及系统所有其他阶模态对总的 FRF 的贡献。而对于工作数据，我们只是在某一特定频率处，考虑结构的响应，它是对系统总响应有贡献的所有模态的线性组合。因此我们现在明白了，如果激励主要是激起 1 阶模态，那么工作变形图将看起来与第 1 阶模态振型非常相像。

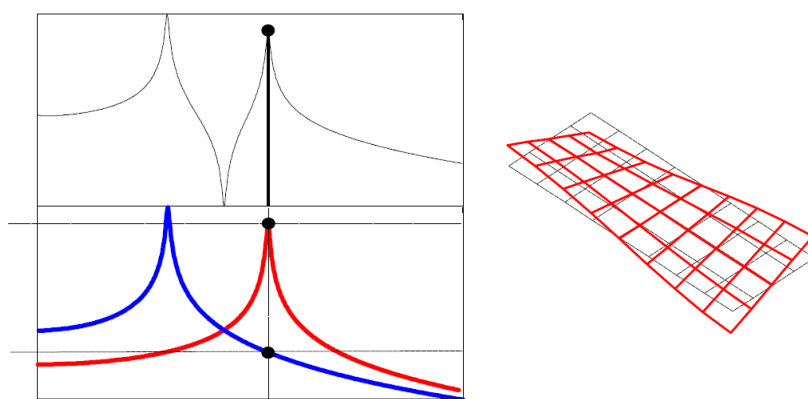


图 26 在 2 阶模态处激励

现在让我们刚好在系统第 2 阶固有频率处激励，图 26 给出了与刚才前面讨论的 1 阶模态相同的信息，但是这会儿我们主要是激励系统的第 2 阶模态。同样，我们必须认识到系统响应看起来像 2 阶模态，但是这儿也有少许 1 阶模态的贡献。

当激励远离某一个共振频率时，会发生怎样的情况？让我们在 1 阶与 2 阶之间的某个频率处激励，这时我们可以看出模态数据与工作数据二者之间真正的差异。图 27 给出了结构的变形形状。

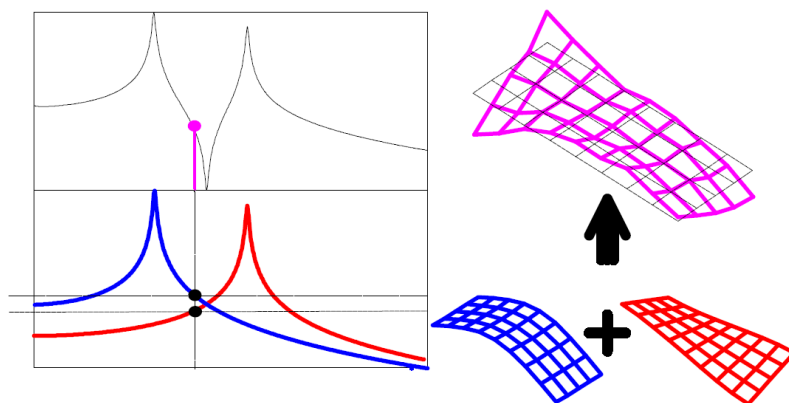


图 27 激励位于 1 阶和 2 阶模态之间

乍一看，变形似乎不像我们以前认识的任何变形，但是如果长时间观察，就会发现变形中有少量 1 阶弯曲和少量 1 阶扭转。因此工作数据主要是 1 阶和 2 阶模态振型的某种组合（一点也不假，实际上还有其他阶模态，但主要是 1 阶和 2 阶模态参与系统响应）。

通过模态基础理解频响函数对某阶模态的贡献，我们已经讨论了工作数据的各个方面。当我们实际采集工作数据时，我们不测量频响函数，而是测量输出频谱。如果观察这些输出频谱，我们不明白为何工作数据看起来像模态振型。图 28 展示了平板结构在某一位置测量得到的输出频谱。施加在结构上的激励频率带宽更宽，就能激起了多阶模态。但是通过理解每一阶模态对工作数据的贡献，更易于明白所有模态对系统总响应有怎样的贡献。

因此，实际上工作变形与模态振型有很大的差别：我们现在明白了模态振型按某种线性方式叠加形成了工作变形。但是通常我们感兴趣的是系统总变形或者总响应。为什么我甚至还要这么麻烦去采集模态数据呢？模态数据采集和参数提取过程似乎有更多的工作要做。

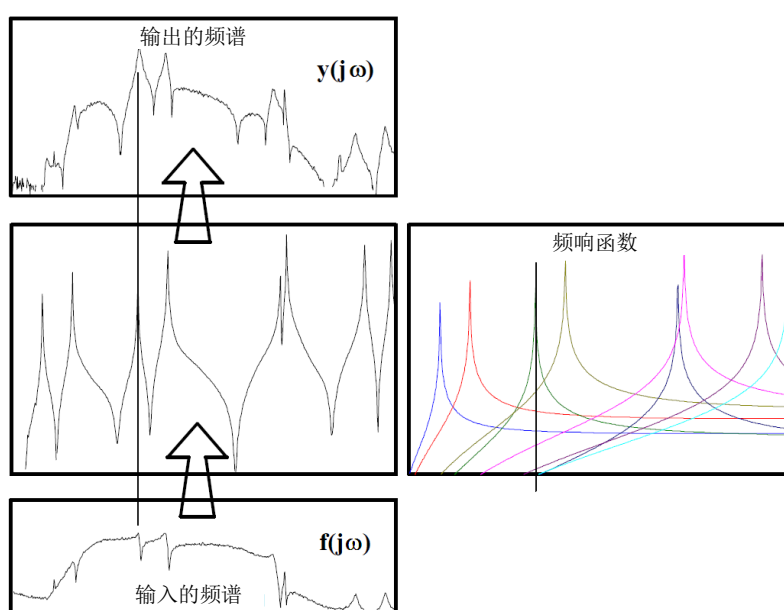


图 28 宽带激励平板





## 模态数据有何作用？

模态数据是非常有用的信息，这些信息可帮助设计几乎任何结构，在设计过程中理解和可视化模态振型是非常宝贵的。它帮忙设计人员确定结构的薄弱区域或者需要改进的地方。开发模态模型对于仿真和设计研究工作非常有用，这些方面的研究之一就是结构动力学修改。

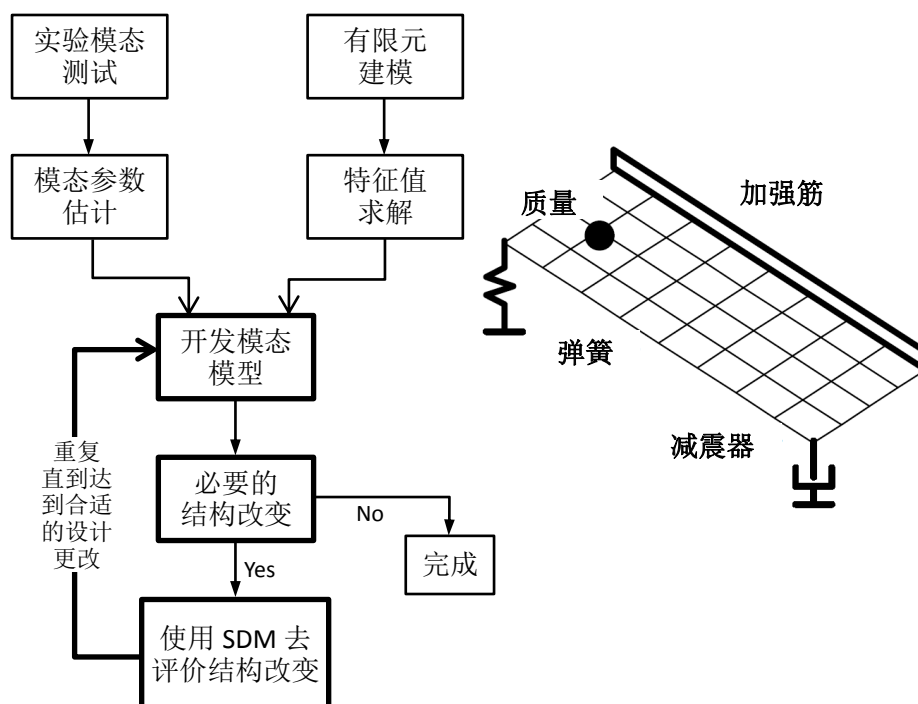


图 29 结构动力学修改过程示意图

结构动力学修改是一种数学处理方法，它利用模态数据（频率、阻尼和模态振型）确定由于物理结构的修改所引起的系统动态特性的改变效果。实际上，这些计算可以在无需对实际结构作物理修改的前提下进行，直到达到合适的设计更改为止，图 29 给出了结构动力学修改的示意图。有关结构的动力修改有太多可细说的地方，但因受篇幅的限制，在这不作过多的描述。

除了结构动力修改研究之外，还可以进行其他一些仿真，比如强迫响应仿真预测因外力引起的系统响应。模态测试另一个非常重要的应用是相关性检查和修正分析模型，如有限元模型修正。还有少数几个更重要的方面跟模态模型的使用有关，图 30 为这方面的示意图。

最后一个常问的问题是最好进行哪种测试。



## 采集模态数据还是工作数据？

当然在日程安排紧凑和预算紧张的情况下，我真有必要同时采集模态数据和工作数据吗？这总是让人难以回答，但如果可能，最好同时采集二者。如果只有其中一类数据可用，那么很多时候，一些工程决策可能是在没有全面认识系统特性的前提下做出的。总而言之，先让我们指出二者之间的不同之处。

为了获得频响函数和模态参数，模态数据要求力是可测的。只有模态数据才能给出系统真实的根本特性。另外，只有模态数据可用于研究结构动力学修改和强迫响应（工作数据不

能用于这些研究)。与有限元模型的相关性验证,也最好使用模态数据。但是必须清楚表明的是单独使用模态数据不能确定结构是否能胜任某些预期的工作或应用,因为模态数据独立于作用在系统上的外力。

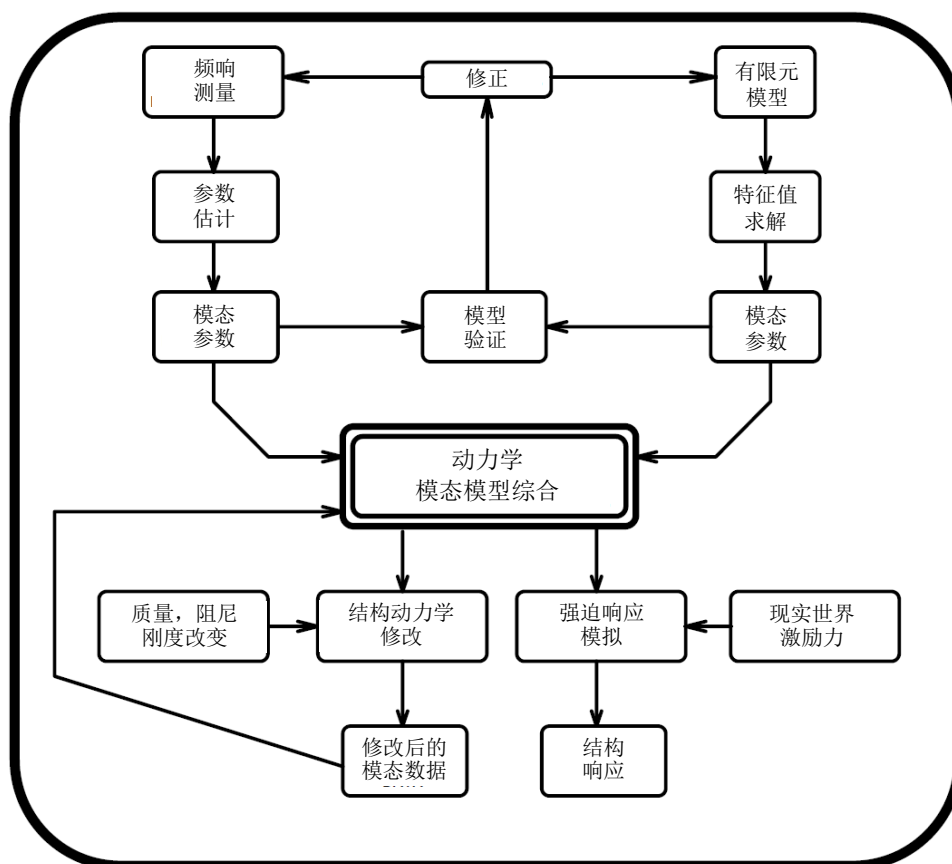


图 30 动力学建模过程总结

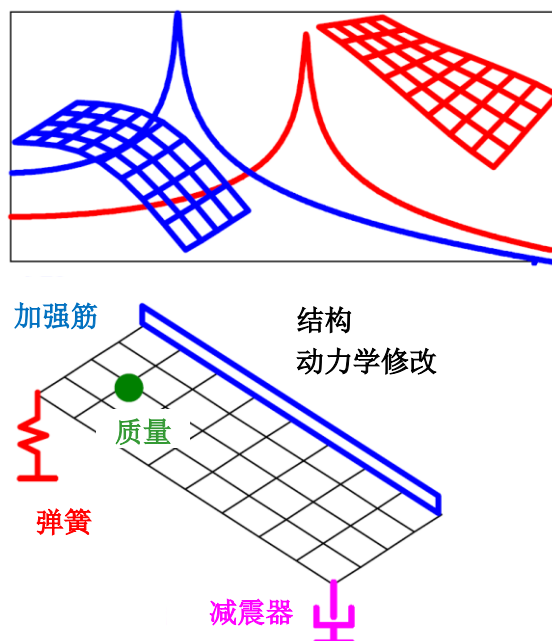


图 31 模态模型的特性

另一方面,工作数据是工作条件下结构行为的真实描述,这是非常有用的信息。然而,许多时候工作变形让人迷惑不解,未必能为怎样解决或改正工作状态中出现的问题提供明确

的指导（并且动力学修改和响应工具不能用于工作数据）。

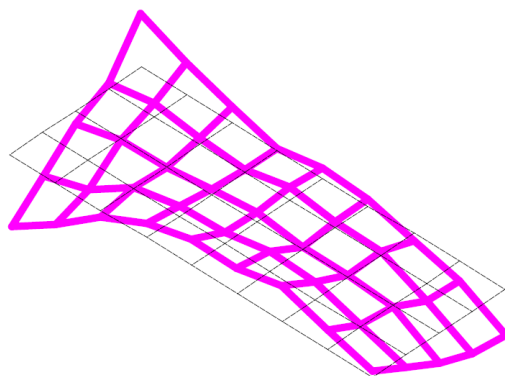


图 32 工作数据的特性

能同时结合工作数据和模态数据去解决动力学问题，那是最理想的情况。



## 总结

采用一些简单的解释去描述结构振动和一些解决结构动力学问题的实用工具的使用，这些都是在没有使用任何详细的数学关系式的前提下完成的。为了更好地理解这儿描述的数据的更多细节，这方面的理论处理是必备的。



## 参考文献

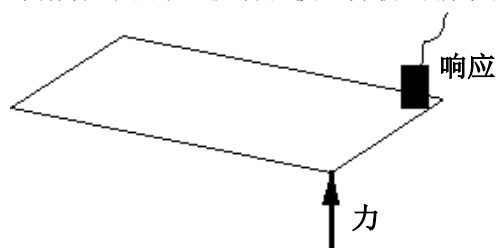
1. 模态分析 I & II 讲稿注释, Peter Avitabile, 马萨诸塞州立大学洛威尔校区
2. 研讨班授课笔记. Peter Avitabile.
3. 模态手册, 基于多媒体计算机的培训和参考指南, 动力学决策, 梅里马克, NH



你能为我解释模态分析吗？

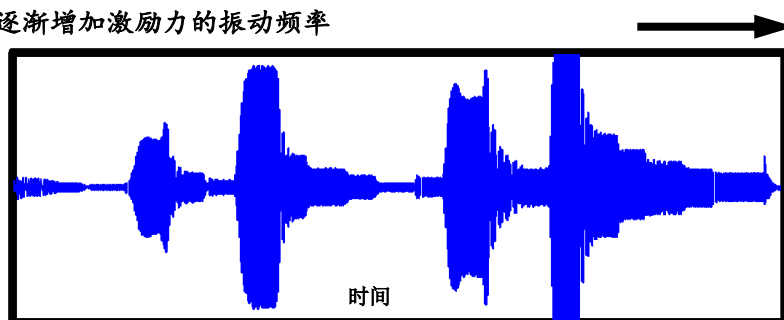
好，需要花费一点时间，但是任何人都能明白。

你不是第一个要求我用通俗易懂的语言解释模态分析的人，这样一来，任何人都能明白模态分析。简单地说，模态分析是一种处理过程，是根据结构的固有特性，包括频率、阻尼和模态振型，这些动力学属性去描述结构的过程。那是一句总结性的语言，现在让我来解释模态分析到底是一个怎样的过程。不涉及太多技术方面的知识，我经常用一块平板的振动模式来简单地解释模态分析。这个解释对于那些振动和模态分析的新手们通常是有用的。

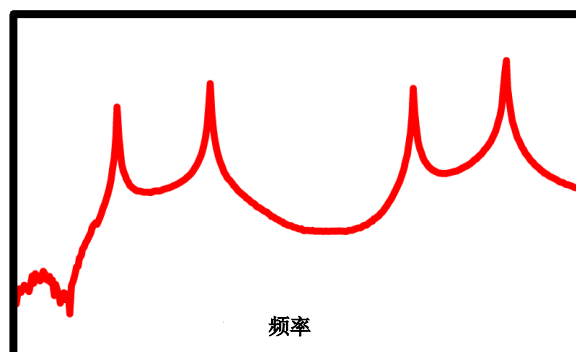


考虑自由支撑的平板，在平板的一个角点施加一个常力，由静力学知识可知，静态力会引起平板的一些静态变形。但是在这儿我想施加的是一个按正弦变化的力。改变此力的振动频率，但是力的峰值保持不变，仅仅是改变力的振动频率。同时在平板另一个角点安装一个加速度传感器，测量由此激励力所引起的平板响应。

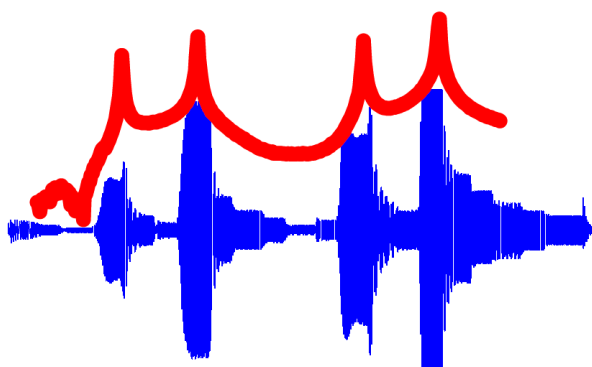
逐渐增加激励力的振动频率



现在如果我们测量平板的响应，将会注意到平板的响应幅值随着激励力的振动频率的变化而变化。随着时间的推进，响应幅值在不同的时刻有增也有减。这似乎很怪异，因为我们在该系统上施加了一个常力，而响应幅值的变化却依赖于激励力的振动频率。具体体现在，当我们施加的外力的振动频率越来越接近系统的固有频率（或者共振频率）时，响应幅值会越来越大，当激励力的振动频率等于共振频率时达到最大值。想想看，真令人大为惊讶，因为施加的外力峰值始终不变，而仅仅是改变其振动频率！

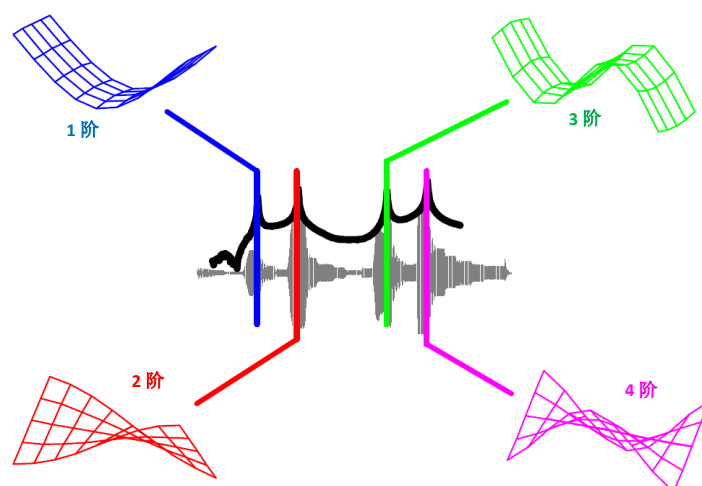


时域数据提供了非常有用的信息，但是如果用快速傅立叶变换（FFT）将时域数据变换到频域，可以计算出所谓的频响函数。这个函数有一些非常有趣的信息值得关注：可以看到频响函数的峰值出现在系统的共振频率处，注意到频响函数的峰值出现在这样的频率处，此处观测到的时域响应信号的幅值达到最大值，这些频率等于输入激励力的振动频率。



现在如果我们将频响函数叠加于时域波形之上，会发现时域波形幅值达到最大值时的振动频率等于频响函数峰值处的频率。所以你能明白，可以使用时域信号出现最大幅值时确定系统的固有频率，也可以使用频响函数确定这些固有频率。显然频响函数更易于确定系统的固有频率。

现在很多人会惊奇结构怎么会有这些固有特征，而更让人惊奇的是在这些固有频率处，结构变形图也具有多种不同的形状，且这些形状取决于激励力的频率。



现在让我们了解结构在每一个固有频率处的变形图。在平板上均匀布置 45 个加速度计，用于测量平板在不同激励频率下的响应幅值。如果激励力频率驻留于结构的每一个固有频率，会发现结构在每个固有频率处存在特定的变形图。表明当激励频率与系统的某一阶固有频率相等时，结构就产生相对应的变形图。当在第 1 阶固有频率处驻留时，平板产生了第 1 阶弯



曲变形，在图中用蓝色表示。在第 2 阶固有频率处驻留时，平板产生了第 1 阶扭转变形，在图中用红色表示。分别在结构的第 3 和第 4 阶固有频率处驻留时，平板产生了第 2 阶弯曲变形和第 2 阶扭转变形，在图中分别用绿色和洋红色表示。这些变形图称作结构的模态振型。（从纯数学立场讲，这实际上并不完全正确，但是在这儿仅作为简单的讨论，从现实立场讲，这些变形图和模态振型非常接近。）

在我们设计的所有结构中，都存在这些固有频率和模态振型。本质上，这些特征依赖于确定结构固有频率和模态振型的结构质量和刚度分布。作为一名设计工程师，需要确定这些频率，并且知道当有外力激励结构时，它们将怎样影响结构的响应。当结构受到激励时，明白结构模态振型和结构将怎样振动有助于设计工程师设计出更优的结构。模态分析有太多需要讲解的地方，这仅仅是一个非常简单的解释。

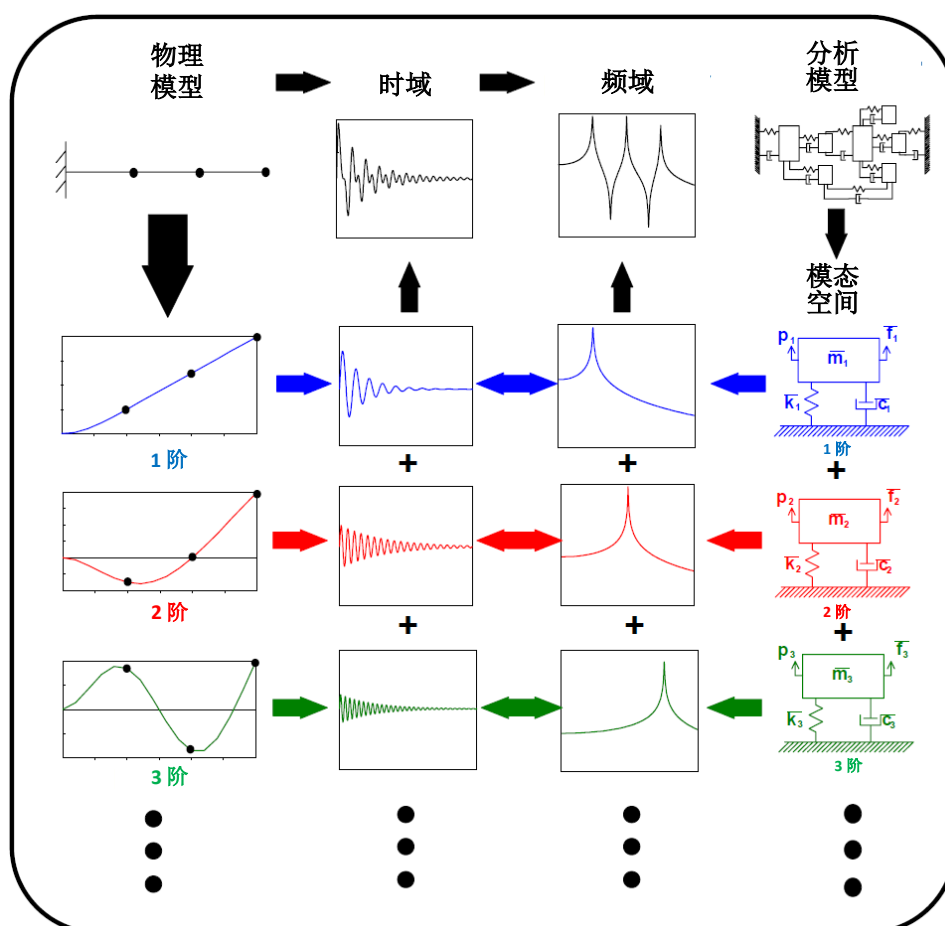
现在我们能更好地理解模态分析是研究结构的固有特性。使用固有频率和模态振型（依赖结构的质量和刚度分布）帮助设计噪声和振动方面应用的结构系统。我们使用模态分析帮助设计所有类型的结构，包括机动车、飞行器、太空飞船、计算机、网球拍、高尔夫球杆……这些例子举不胜举。

我希望这个简短的介绍有助于解释什么是模态分析。我用上面的例子向我母亲解释模态分析，她第一次实际明白了我到底在做什么。从此以后，她用非常像模态分析的各种不同言语向她的朋友们解释模态分析，其中最佳的一个是她称这种分析为笨蛋分析……当然，这又是另一个故事了。



能解释时域、频域和模态空间的不同之处吗？我一直听说它们，但不知道它们有什么不同。有太多需要解释，但让我们从简单事情入手吧。

这个问题经常有人问到，三者有太多的不同之处。因此，让我们从一个简单的解释开始着手，不涉及太多的数学知识，用一个简单的示意图来解释。用这个图讨论时域、频域、模态空间和物理空间之间的所有不同之处。这个图有太多方面需要讨论，故将此图分成许多子块，每次讨论其中一块，最后对所有子块进行总结。你可能还记得前面问我的什么是模态分析的讨论（“你能为我解释模态分析是什么吗？”），在这，前面的讨论对我们解释这个问题有帮助作用。



首先，让我们考虑一根悬臂梁，假设在梁的自由端受到一个脉冲激励。梁自由端的响应将包含系统所有模态的响应（图中用黑色表示时域响应），注意到这个响应是在一些不同频率处的响应。通过傅立叶变换，将梁自由端的时域响应从时域变换到频域。虽然傅立叶变换过程包含重要意义的数学公式，但它是一种人们一直常用的数学变换。时域信号到变换频域，

其频域表达通常称为频响函数，或者简写成 **FRF**（图中用黑色绘出了频响函数），注意图中的峰值对应于系统的固有频率。

在进一步讨论时域和频域图形之前，先说说图中左上角的物理模型。我们知道悬臂梁有许多阶固有频率，在每一阶固有频率处，结构都将以一种确定的模式发生变形，这种变形称作模态振型，如先前描述的一样。对于这根梁，我们看到图中蓝色为第 1 阶弯曲模态，红色为第 2 阶弯曲模态，绿色为第 3 阶弯曲模态。当然，还有其他高阶模态没有给出，在这我们仅仅讨论前三阶模态，并且从前三阶模态可以很容易地延伸到高阶模态。

这样的实体梁也可以用解析的集中质量模型或者有限元模型（图中黑色表示）来估算，如图中右上角所示。这个模型通常用方程组进行估算，这些方程在一些不同的位置或不同自由度（DOF）之间存在相互作用或者耦合。这意味着如果你推动模型中的某一个自由度，那么其他自由度也会受到影响，并且产生运动。为了确定系统的响应行为，这些耦合意味着这些方程更为复杂。随着描述系统的方程数目变得越来越大，那么方程的复杂程度也就越来越高。通常将描述系统特征的运动方程组用矩阵形式表示为

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{F}(\mathbf{t})\}$$

这里  $[\mathbf{M}]$ ， $[\mathbf{C}]$  和  $[\mathbf{K}]$  分别表示质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵，连同相应的加速度向量、速度向量和位移向量以及外力向量一起组成运动方程。通常质量矩阵是对角阵，阻尼和刚度矩阵是带有非对角元素的对称阵，这些非对角元素表明了描述系统的不同方程或不同自由度之间的耦合程度，矩阵的大小由描述系统的方程总数决定。从数学角度讲，通过特征值求解和模态变换方程，将这组耦合的方程进行解耦，解耦后的方程为一组单自由度系统的运动方程，此时转换后的新坐标系，称为模态空间，解耦后的模态质量、模态阻尼和模态刚度矩阵全为对角阵，如：

$$\begin{bmatrix} \backslash & & \\ & \bar{\mathbf{M}} & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \{\ddot{\mathbf{p}}\} + \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & \bar{\mathbf{C}} & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \{\dot{\mathbf{p}}\} + \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & \bar{\mathbf{K}} & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \{\mathbf{p}\} = [\mathbf{U}]^T \{\mathbf{F}\}$$

因此，我们可以看出模态转换是将方程从物理空间通过模态转换方程转换到模态空间的过程；是将一组复杂的、耦合的物理方程转换成一组解耦的单自由度系统的过程。因而，我们可以将图中的分析模型分解成一组单自由度系统，如图中所示的蓝色 1 阶、红色 2 阶和绿色 3 阶。模态空间使得我们更易于用单自由度系统去描述结构系统。

现在回到图中用黑色表示的时域和频域响应。我们知道得到的系统总响应来自各阶模态的贡献，图中黑色表示的总响应由 1 阶、2 阶和 3 阶模态的响应组成。不管是在时域还是频域描述系统，这个结论总是成立的。每个域都是等价的，仅仅是从不同的角度去描述数据而已。如同货币一样，从一个国家到另一个国家，每个国家的货币看起来不相同，但是它们实质是同一个东西。所以我们可以看出系统总的时域响应是由各阶模态的时域响应所组成，即由 1 阶、2 阶和 3 阶模态的时域响应贡献所组成。同样，系统总的频响函数也是由各阶模态的频响函数组成，即由 1 阶、2 阶和 3 阶的频响函数组成（在这我们仅仅给出了频响函数的幅值部分，频响函数其实是很复杂的，正确的表示方式应该用幅值和相位或者实部和虚部来表示）。

既然我们可以将分析模型分解成一组单自由度系统，因而我们可以确定每个单自由度系统的频响函数，如图所示的 1 阶、2 阶和 3 阶模态的频响函数。同样，也可以通过一种闭型解确定由脉冲引起的每个单自由度系统的时域响应，或由每个单自由度系统的 **FRF** 的傅立叶逆变换得到其时域响应。我们也可以在梁的自由端测量由脉冲引起的总响应，然后滤波得到系统每阶模态的时域响应，如 1 阶、2 阶和 3 阶模态（当然，我简化了许多理论，以便我

们能理解这些概念)。

既然我们已经剖析了图中所有的子块部分,我想应该更清楚时域、频域、模态空间和物理空间并没有实质性的不同,仅仅是形式不同而已。每个域只是描述或者察看数据更方便。然而,有时从一个域察看某些信息会比其他的域更容易、更便捷。比如,总的时域响应不能确定有多少阶模态对梁的响应有贡献,但是频域的总的频响函数就能清楚地显示有多少阶模态被激起和每一阶模态对应的频率是多少。因此,我们经常将数据从一个域变换到另一个域,仅仅是因为数据更易于解释。

虽然还有更多的方面需要讲解,但是我希望这些简单的、示意性的解释能从另一个视角帮助你更好地理解这些概念。回想一下,如果你还有模态分析其他问题,请咨询我。



激振器和力锤进行模态测试，有什么不同？

好，这个问题不错。答案是有同也有异！

这是另一个会被经常问到的问题。有关这个问题，二者有太多的不同之处。让我们首先从一些基础知识开始，明白为什么用简单的是或者不是都很难回答这个问题。这需要用到几个简单的方程帮助解释这个问题。

首先，我们记得任何系统都可以用它的运动方程来描述。本质上讲，这个方程是个简单的力平衡方程：质量×加速度+阻尼×速度+刚度×位移=外力。出于某些理由，这个方程在拉氏域更易于我们进行各种运算。通过拉氏变换，运动方程可以写成

$$[\mathbf{M}]s^2 + [\mathbf{C}]s + [\mathbf{K}]\{\mathbf{X}(s)\} = \{\mathbf{F}(s)\} \Rightarrow [\mathbf{B}(s)]\{\mathbf{X}(s)\} = \{\mathbf{F}(s)\}$$

将方程写成矩阵形式，便于组织所有的方程。 $[\mathbf{M}]$ ， $[\mathbf{C}]$ 和 $[\mathbf{K}]$ 分别表示质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵，并且这些矩阵都是对称阵。因此，系统矩阵 $[\mathbf{B}(s)]$ 也是对称阵。系统的传递函数是系统矩阵的逆矩阵

$$[\mathbf{B}(s)]^{-1} = [\mathbf{H}(s)] = \frac{\text{adj}[\mathbf{B}(s)]}{\det[\mathbf{B}(s)]} = \frac{[\mathbf{A}(s)]}{\det[\mathbf{B}(s)]}$$

当然，还记得我们在模态测试过程中测量的频响函数仅仅是系统传递函数沿频率轴的估计。很多时候，为方便起见，我们将频响函数写成部分分式形式

$$[\mathbf{H}(s)]_{s=j\omega} = [\mathbf{H}(j\omega)] = \sum_{k=1}^m \left( \frac{[\mathbf{A}_k]}{(j\omega - \mathbf{p}_k)} + \frac{[\mathbf{A}_k^*]}{(j\omega - \mathbf{p}_k^*)} \right)$$

频响函数矩阵中的单个元素可以写成

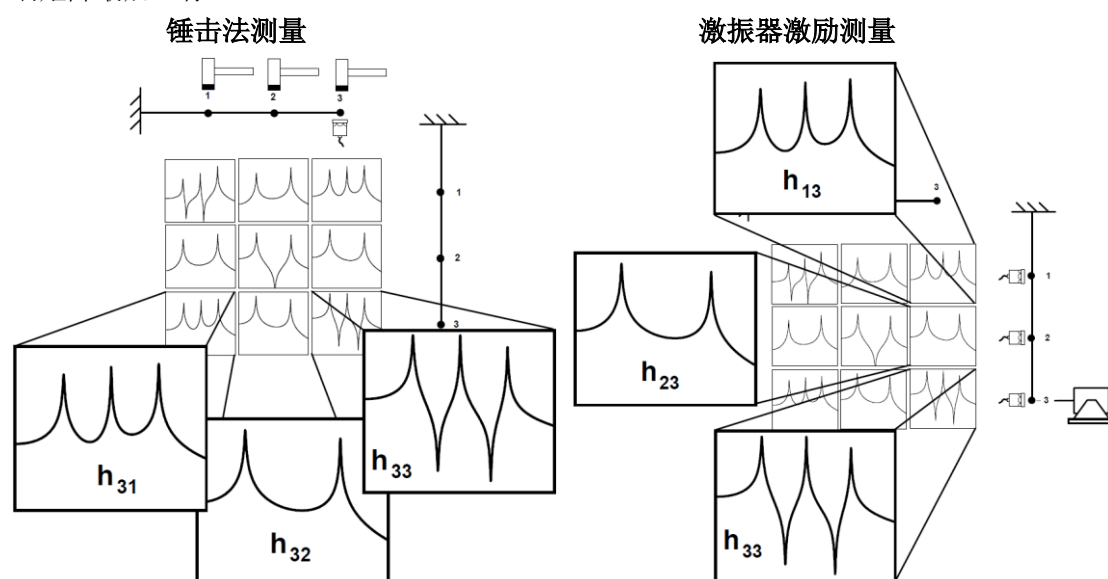
$$h_{ij}(j\omega) = \sum_{k=1}^m \left( \frac{a_{ijk}}{(j\omega - \mathbf{p}_k)} + \frac{a_{ijk}^*}{(j\omega - \mathbf{p}_k^*)} \right)$$

为什么我不厌其烦地写出所有这些等式？那是因为这些等式包含非常重要的信息，与你提出的问题有关。因为 $[\mathbf{M}]$ ， $[\mathbf{C}]$ 和 $[\mathbf{K}]$ 是对称阵，所以 $[\mathbf{B}(s)]$ 和 $[\mathbf{H}(s)]$ 也是对称阵。这意味着 $[\mathbf{H}(j\omega)]$ 也是对称阵。意味着 $h_{ij} = h_{ji}$ ，这称为互易性。这就表明你可以在位置*i*点锤击激励，在位置*j*点测量响应，得到FRF；同样也可以在位置*j*点锤击激励，在位置*i*点测量响应，得到完全相同的FRF，这就是互易性的含义。

现在，我们对一根只有3个测点的悬臂梁进行锤击法测试，总共有9个可能的输入-输



出频响函数可以测量。但对于这个例子，我们将加速度计置于 3 号测点处，通过锤击 1, 2 和 3 点测量 FRF。我们称 3 号测点为参考点，因为每一次锤击时，响应总是这一点。因为力锤是从一个测点移动到另一个测点，那么测量的 FRF 为频响函数矩阵中的一行，并且是频响矩阵最后一行。



在讨论任何其他问题之前，让我们先用激振器进行相同的测量。将激振器置于测点 3 处，加速度计在梁上 1, 2 和 3 号测点逐点移动，测量 FRF，注意 3 号测点仍然是参考点，因为每一次测量时，激励总是在这一点。既然激励力的位置是固定的，那么得到的 FRF 为频响函数矩阵的一列，且为矩阵的最后一列。

如果观察测量得到的频响函数，会注意到由激振器激励得到的  $h_{13}$  与由力锤锤击激励得到的  $h_{31}$  完全相同，同时注意到由激振器激励得到的  $h_{23}$  与由力锤锤击激励得到的  $h_{32}$  也完全相同，这就是所谓的互易性。从理论角度讲，激振器测试和锤击法测试采集到的数据没什么不同，两种方式获得的数据完全相同，但这仅仅是理论观点。如果按照理论观点，没有理由不可以按以下方式进行测试：通过保持锤击点不变，加速度计沿着测点逐点移动。对于激振器测试也有相同的类推：保持响应加速度计在同一测点，逐点移动激振器（但我不知道谁会以这种方式进行测试！）。从理论观点上讲，只要采集得到输入-输出位置的传递特性数据，那么不管何种测量方式，采集得到的数据都没有什么不同。

所以，对于激振器测试和锤击法测试，答案是二者没有什么不同之处，但这仅仅是理论观点！如果我们能够在结构上施加一个纯力，该力与结构二者之间不存在任何的相互作用，并且可以使用一个无质量的传感器测量响应，那么，这种情况下，不管哪种测量方式对结果都是没有影响的，理论是成立的。但是，如果不是这种情况又怎样呢。

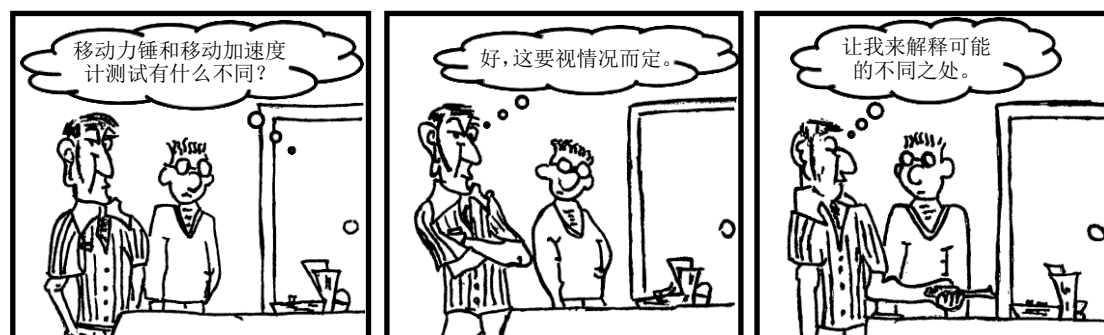
现在让我们从现实角度出发，考虑实际进行的测试。观点就是在模态测试过程中，激振器和响应传感器通常对结构有影响。需要记住的主要一项是处于测试状态下的被测结构已不再是您最初想获得模态参数的那个结构了。因为在结构上已附加了涉及数据采集的东西：结构悬挂系统、安装的传感器的重量、激振器推力杆/顶杆的潜在刚度影响等等。因此，虽然理论告诉我们，锤击法测试和激振器测试不存在任何差异，但现实中因数据采集方面的原因，二者经常存在差异。

激振器测试过程中，最明显的差异是由移动加速度计引起的。加速度计的质量相对于结构的总质量可能非常小，但是它的质量相对于结构不同部分的有效质量可能又非常大。多通道测试系统，这个问题更加突出，为了获得所有的频响函数，许多加速度计在结构上移动。这会是个问题，特别是对于轻质结构。纠正此问题的方法之一是在结构上安装所有的加速度

计，即使一次测量只用到少数几个加速度计。另一个方法是在非测量位置上安装与加速度计质量相等的质量哑元，这将能消除移动的质量效应。

另一个差异在于激振器推力杆带来的影响。本质上，结构的模态受激振器附属装置的质量和刚度的影响。虽然我们试图将这部分影响减少到最低程度，但是它们仍然存在。激振器推力杆的作用是分离激振器对结构的影响。然而，多数结构，激振器附属装置的影响仍然显著。因为锤击法测试不会遭受这些问题，所以可能会得到的不同的结果。

因此，虽然理论说激振器测试和锤击法测试二者不存在差异，但一些非常基本的现实因素却会引起了一些差异。我希望以上解释已清楚地回答了你的问题。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



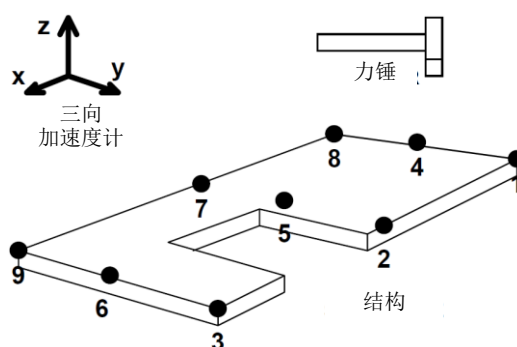
移动力锤和移动加速度计测试有什么不同？

好，这要视情况而定。让我来解释可能的不同之处。

本质上，模态测试时移动力锤和移动加速度计，二者没有什么不同之处。倘若采集到相同的数据，这个结论是成立的。让我们通过讨论一次表面看似简单，但实际却诡异的模态测试来解释它吧。

早期我们用两通道分析仪进行模态测试，这样进行锤击法测试相当直观。通常力锤在结构上移动，加速度计固定不动。典型的做法是在结构每个测点位置处分别锤击  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向，得到相对于加速度计固定的参考点的频响函数。但是当我们用多通道分析仪进行相同的测试时，却需要强调一些细微的差别。考虑对如下图所示的 9 个测点的结构进行一次锤击法测试。假设测试设备为一个力锤、一个三向加速度计和一个 4 通道 FFT 分析仪或者数据采集系统。

### 模态测试配置



一种测试方式是将三向加速度计固定于某一个测点处，力锤沿同一个方向锤击 9 个测点，得到结构 27 个 FRF。另一种测试方式是力锤固定在某一个测点位置，沿一个方向锤击，三向加速度计遍历 9 个测点，再次得到 27 个 FRF。两种情况下，力锤都只是沿一个方向锤击，得到了 27 个 FRF。

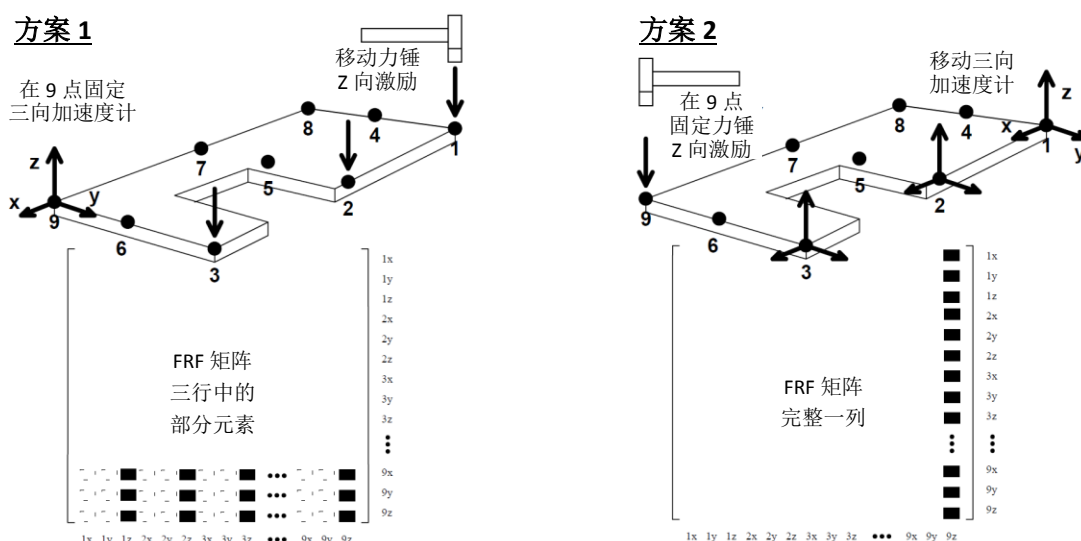
但是两次测试相同吗？初看起来，你可能会认为两次测试的结果相同。为了证实是否相同，让我们按前述方式逐步进行测试，并列出每种测试方式下得到的 FRF。

#### 测试方案#1

我们按图所示方案#1 进行模态测试。在本次测试中，三向加速度计固定于 9 号测点，测量  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向的输出。力锤仅沿  $z$  方向进行激励，移动力锤遍历图示的 9 个测点。

列出本次测试得到的每个 FRF。当我们沿  $z$  方向锤击 1 号测点时，9 号测点的响应为  $9x$ 、 $9y$  和  $9z$ ，因此第一次测量得到的 FRF 为  $9x/1z$ 、 $9y/1z$  和  $9z/1z$ 。接下来沿  $z$  方向锤击 2 号测点，响应为  $9x$ 、 $9y$  和  $9z$ ，得到的 FRF 为  $9x/2z$ 、 $9y/2z$  和  $9z/2z$ 。我们可以继续进行测试，但是我想你已经知道各点 FRF 的表达形式了。我们实际测量得到了哪些 FRF？让我们排列出 FRF 矩阵中已测量得到的所有 FRF，就能看到我们实际测量了哪些 FRF。

仔细观察 FRF 矩阵，注意到我们仅仅得到了 FRF 矩阵不同三行中的部分元素。因此，我们也只有系统动态特性这三行的部分描述。并且这些元素也仅含有系统特性  $z$  方向的信息。如果结构只在  $z$  方向运动，这将是一次正确的测量。但是如果在  $x$  方向激励，结构在  $z$  方向运动也显著，结果如何？我们只测量了  $z$  方向激励下结构的响应！



## 测试方案 #2

让我们按方案#2 进行模态测试。本次测试中，力锤仅沿  $z$  向锤击 9 号测点，移动三向加速度计遍历每个测点，测量  $x$ ,  $y$  和  $z$  方向的响应。

列出本次测量得到的每个 FRF。当我们沿  $z$  向锤击 9 号测点时，1 号测点的响应为  $1x$ ,  $1y$  和  $1z$ ，因此第一次测量得到的 FRF 为  $1x/9z$ ,  $1y/9z$  和  $1z/9z$ 。接下来将加速度计移动到 2 号测点，测量的响应为  $2x$ ,  $2y$  和  $2z$ ，第二组 FRF 为  $2x/9z$ ,  $2y/9z$  和  $2z/9z$ 。我们实际测量得到了哪些 FRF？再次，将测量得到的每个 FRF 排列在 FRF 矩阵中，就能看出我们测量得到了哪些 FRF。

此时注意到我们已经测量得到了 FRF 矩阵中完整的一列，这样就可以更完整地描述系统的响应了。我们已经测量得到了足够的 FRF，这样就可以描述系统所有测点的响应了。当然，我们假设参考点 9 在  $z$  方向不是某阶模态的节点。

## 现在我们需要做什么？

因此，尽管表面看起来两次测试是相同的，但实际上却存在差异！因而，怎样改变这些测试流程以便得到相同的测量结果呢？有两种方法。首先，方案#1 可以按以下方式进行变动。使用单向加速度计代替三向加速度计，在 9 号测点  $z$  方向测量响应。不同之处在于此时  $x$ ,  $y$  和  $z$  方向都需要锤击，然后就能得到以 9 号测点  $z$  向作为参考点的 FRF 矩阵中完整的一行。倘若互易性有效，那么此方法测量得到的数据与方案#2 测量得到的数据是相同的。

确保采集到相同数据的另一种方法如下所述。方案#1 中力锤需要对每个测点进行  $x$ ,  $y$  和  $z$  方向的锤击，移动力锤遍历所有测点的三个方向。方案#2 中力锤仅在 9 号测点进行锤击，但是需要锤击 9 号测点三个方向。此时两次测试将得到 FRF 矩阵完整的 3 行或 3 列。

现在你可能对这还有一点迷惑，我知道初次听到，可能很难领会我所讲的。能使你信服的最好方法是写出你打算测量得到的 FRF 矩阵中的所有元素，要确保至少能获得完整的一行或一列。

我希望这些简单的解释能帮助你消除疑问，你需要认真仔细思考你打算实施的测量。记住我常说的：“思想不能任性，三思而后行！”，如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



应该总是使用硬锤头做测试才能确保力谱在整个频带内平坦？

好，太硬的锤头可能会引起问题。

出于某些原因，每个人都认为锤击法测试输入谱（也称为力谱）在整个感兴趣的频率范围内应该平坦。但我们所谓的力谱“平坦”意味着什么呢？更应该这样说，力谱在整个频率范围内应该“相对平坦”，在频谱图上“没有显著地衰减或零值区域”。这到底是什么意思呢。

基本上，我们希望力谱在整个关心的频率范围内有足够的、分布相当均匀的激励能量。如果力谱完全衰减到零，那么在那个频率将不能激起结构的响应，这是不希望出现的。我使用词语“相对平坦”是考虑到一些关于哪些是可接受的工程判决。

当然，很多时候，人们不喜欢工程师们作判决，因此他们确定了特定的准则或极限，迫使情况能够人为控制。有时，特定的准则，比如“在整个 FFT 分析频率范围内，力谱衰减不能超过 3dB”，便被写成了规范。这是非常明确的要求，不允许工程师多想，迫使他们不加思考地按照此规则行事。像这样的准则可能会产生低质量的测试结果，但是如果我们不去思考（或者不允许多加思考），那么可能就会获得不合适的测量。

现在你询问有关使用一个硬锤头进行所有锤击测试的问题，我可以马上回答你，但首先让我们讨论进行锤击法测试时，有关锤头选择的一些基本知识。首先，需要记住的是作用在结构上的力谱是力锤/锤头刚度和结构刚度组合的结果。输入功率谱主要受力脉冲作用时间长短控制。作用时间长的脉冲产生较窄的频谱，作用时间短的脉冲产生较宽的频谱。

让我们看几个例子，从测试角度明白这些意味着什么（在下面所有图中，黑色表示 FRF，蓝色表示力谱，红色表示相干）。

现在用一个非常软的锤头激励结构，关心的频率为 800Hz 以内。如图 1 所示，可以看出 400Hz 以后，力谱（蓝色）已严重衰减。同时注意到 400Hz 以后，相干（红色）开始严重衰减，FRF（黑色）也不是特别的好。出现这样的问题在于高频段没有足够的激励能量激起结构的响应。如果输入能量不够，那么相应的也没有太多的输出响应。这样由测量输入引起的测量输出也不会有，FRF 和相干都是不可接受的。

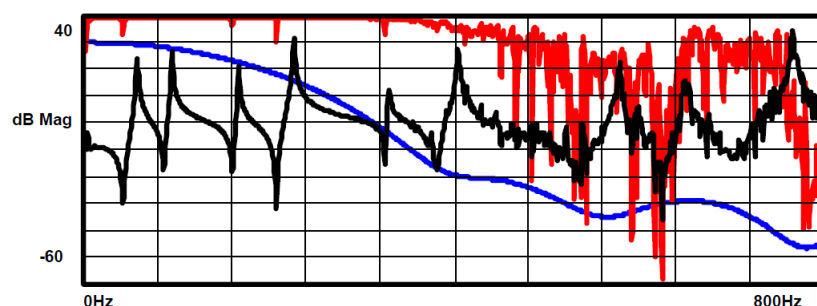


图 1 非常软的锤头

现在让我们用一个非常硬的锤头，在 200Hz 内激励结构。如图 2 所示，可以看出输入功率谱（蓝色）在整个感兴趣的频带内非常平坦。同时也注意到本次测试的相干（红色）不



是特别的理想。这个问题在于高频段激励结构的能量太多，激起了结构的所有模态的响应(稍后我们将进一步讨论这个问题)。

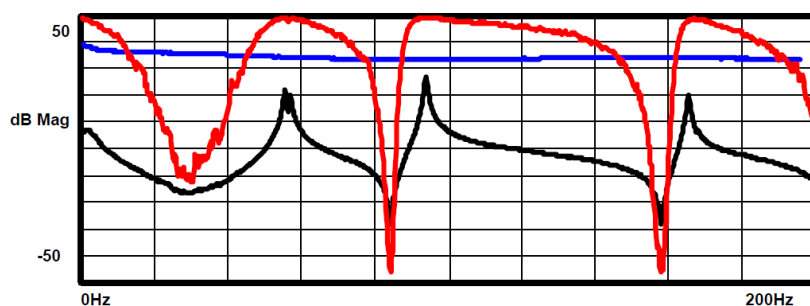


图 2 非常硬的锤头

现在使用一个硬度适中的锤头，在 200Hz 以内激励结构，这样得到的力谱在感兴趣的频率范围末端没有严重衰减。如图 3 所示，我们可以看出输入功率谱（蓝色）在 200Hz 内衰减了 10~20dB。同时注意到在 200Hz 的带宽内相干看起来效果相当不错，除了几个反共振峰处外。相干在这些频率处的下坠完全是可以接受的，因为在这些频率处结构是非共振（反共振）的。这意味着结构没有响应可测量，所以相干在此处如预期般地出现下落。这是一次高质量的测试。

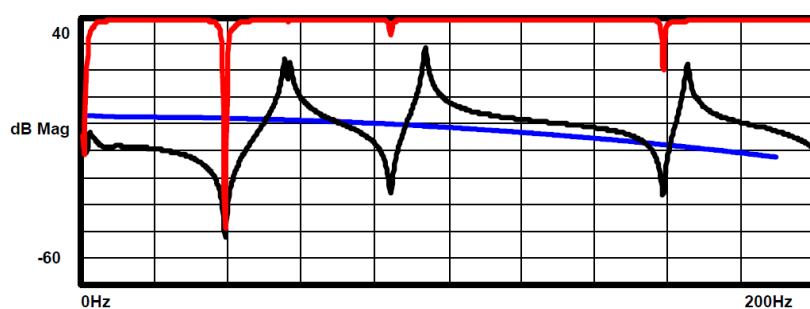


图 3 合适的锤头

注意到力谱并不像你建议的那样相当平坦。事实上，当力谱如图 2 所示那样几乎相当平坦时，得到的测量也并不是高质量的测量。让我来解释其中的原由。考虑如图 4 所示的测量，此次测量的频率带宽为 400Hz，使用的力锤得到的力谱在 400Hz 的带宽内有近 20dB 的衰减，但这次测量或许是可接受的。

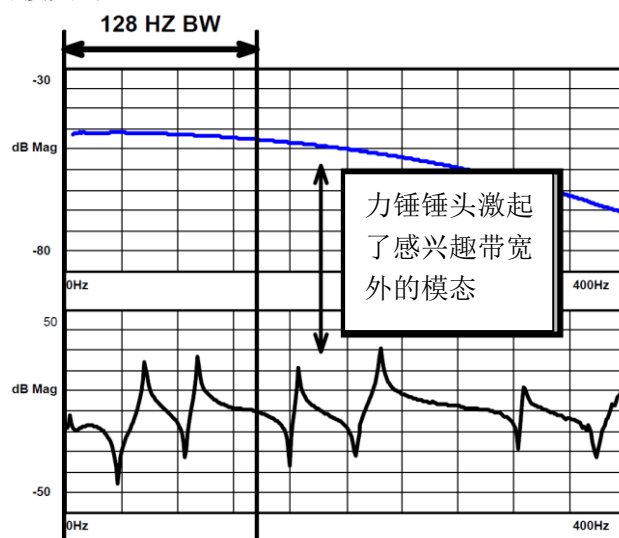


图 4 激起的模态位于感兴趣的带宽之外



现在让我说，我只想测量到 128Hz，在这个频带内可以应用力谱衰减不能超过 3dB 的限制。观察图 4 中 128Hz 带宽内，力谱衰减了近 2~3dB，因此，这次测量应该是可接受的。但是你必须认识到虽然分析带宽只有 128Hz，但是结构的响应是基于施加到结构上的激励能量。因此，结构的响应会宽于 128Hz，因为输入力激起了所有的模态，*即使我可能对这些频率不感兴趣。*

安装在结构上的加速度计，测量了所有响应，并以电压形式输入到分析仪中。从图中整条 FRF 曲线可以一眼就看出，似乎只有 1/3 的激励能量与感兴趣的带宽有关，其余的能量与我们不关心的测量频带相关。但是加速度计能感知所有的激励能量。分析仪上的模数转换器（ADC）可能需要进行相应的设置，保证结构总响应不会出现过载。

如果信号在到达分析仪之前没有进行模拟滤波，那么模数转换器的量程需要设置极高，以避免潜在的过载。*记住，信号大多数能量可能位于感兴趣的 128Hz 带宽之外！*这将引起模数转换器的量化问题。解决这个问题很容易，通过改变锤头，要求使用的锤头不会激起感兴趣带宽以外的模态。

现在你能明白为什么我一直不喜欢用硬锤头进行锤击法测试了吧。确保力谱相当平坦，问题在于它激起了更多超过我们感兴趣频带的模态，因而可能会是一次低质量的测量。回想一下，如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



激振器哪种激励信号最好？它们有什么不同？

好，这是个不错的问题。让我们谈谈这些不同。

让我们来讨论当今模态分析最常用的激励技术。激振器有以下几种激励方式：随机、猝发随机、正弦快速扫频和数字步进正弦等。但是在我们讨论这些激励技术之前，有必要先讨论一些基础知识。先将这些激励信号进行分类，并说明何时用何种激励信号。首先，将这些激励信号分成确定性激励信号和不确定性（或随机）激励信号。

确定信号是时域上任何一点都可用确定的数学函数来描述的信号，它们能完全确定。自然界中这类信号的典型代表是正弦信号，如正弦快速扫频信号和数字步进正弦信号。另一方面，随机信号不能通过数学函数来描述，但是能从统计学角度描述他们的特性。这类典型的信号为随机信号和猝发随机信号。

通常，线性系统使用确定信号。也使用确定信号对一个系统作线性检查，检查该系统是否为线性系统。使用随机信号可平均由其他因素引起的系统轻微非线性。如果结构具有显而易见的非线性，那么我们应该停止测试，并思考一个线性的模态分析结果是否有用。但是理解这两类信号之间的不同之处有助于帮助我们决定哪种激励方式将提供最佳的测量。依赖于被测的结构系统，你可能想证明处于测试下的系统为线性系统，或者你可能想线性化系统中存在的任何轻微非线性。

首先，考虑随机激励，现今广泛用于普通的振动测试。但是对于获得模态测试所需的 FRF，不认为随机激励是最佳的激励技术之一（尽管随机激励仍然经常使用）。随机信号的随机特性是信号的幅值和相位随采集到的平均值的变化而变化。这样易于平均掉结构中可能存在的任何轻微非线性。虽然这是有利的一面，但是这个信号从不满足 FFT 变换的周期性要求，因而，泄漏是个极其严重的问题。甚至施加汉宁窗，相应的 FRF 仍然存在泄漏，峰值幅值仍将受到影响。由于泄漏和窗函数的影响，使得结构看起来像是个大阻尼结构。图 1 所示为一个典型的测量序列，图 2 为相应于图 1 的频响函数和相干。注意相干在系统共振处有突变下降尖峰，这是随机激励显著的特征。

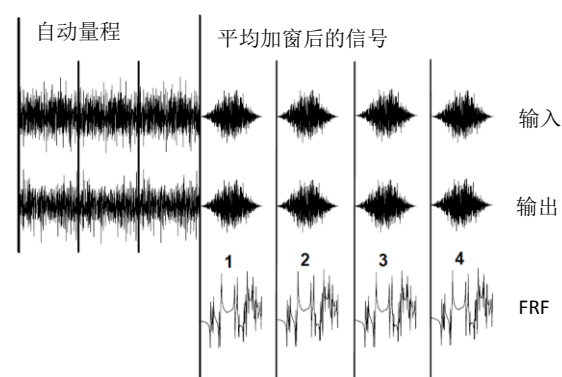


图 1 典型的随机测量序列

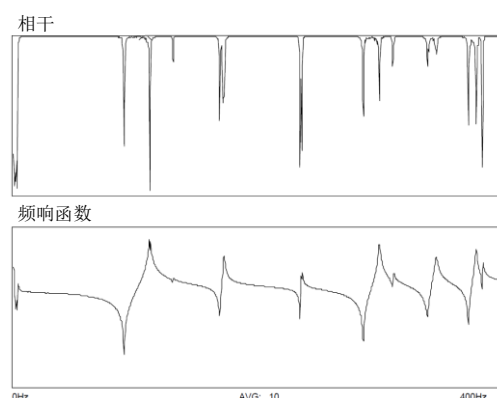


图 2 加汉宁窗的随机激励

现在考虑猝发随机激励。与随机激励唯一不同之处在于数据采集过程中只使用了一部分随机信号,如果采用预触发延迟,那么猝发随机信号在一个采样周期内能完全观测到。因此,猝发随机信号满足 FFT 变换的周期性要求。这意味着信号不存在泄漏和不需要加窗函数。当然,输入和输出信号两者都要满足这个条件。对于大多数结构而言,这一点很容易实现。这类信号适合于平均掉测量中可能存在的轻微非线性。图 3 所示为一次典型的这类信号的时域测量。注意到中断激励是为了确保响应信号在采样周期内衰减到零。图 4 为相应于图 3 的 FRF 和相干。与图 2 相比较,注意到 FRF 和相干有明显的改善,峰值更陡峭、更清晰,共振峰处的相干也特别好。

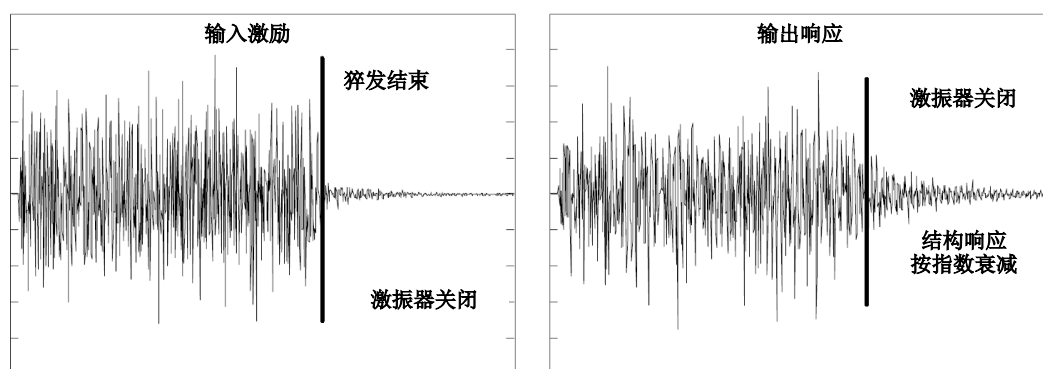


图 3 典型的猝发随机测量序列

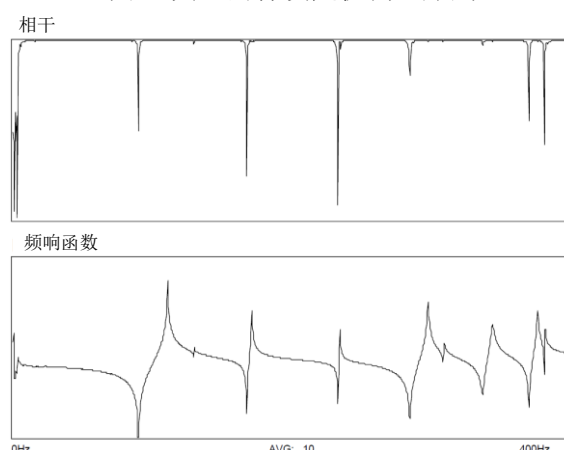


图 4 猝发随机激励

正弦快速扫频激励是在分析仪的一个采样周期内,信号从低频快速扫到高频的一种快速扫频方式。信号重复出现,因而满足 FFT 变换的周期性要求。这意味着信号不存在泄漏,无须加窗。当然,信号必须连续,以便结构获得稳态响应。图 5 为正弦快速扫频激励相应的 FRF 和相干。得到的测量结果非常类似猝发随机激励。通过改变作用在系统上的输入力的量级,使用这种激励技术可以很容易地对结构进行线性检查。

最后,数字步进正弦激励技术要求激励信号为单频信号,其频率成分与分析仪的谱线重合。因为能保证满足 FFT 变换的周期性要求,所以数字步进正弦信号无泄漏存在,不需要加窗函数。因为它本质上不是带宽激励,因此它是所有激励方式中最慢的,因为每条谱线都需要单独估算。然而,对于证明非线性,它的表现又是卓越的,上面所有讨论的激励方式,数字步进正弦激励可能产生最优的测量结果。

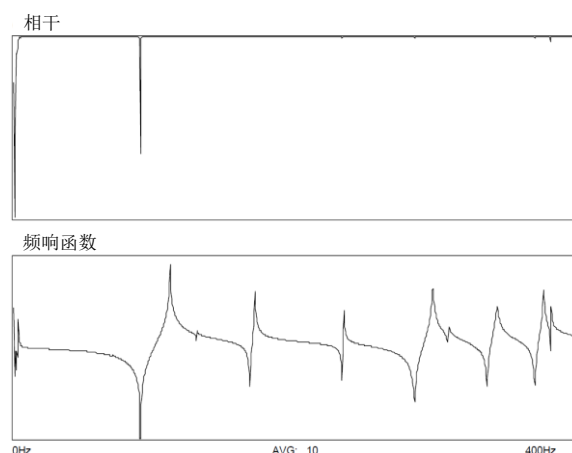


图 5 正弦快速扫频激励

比较这些激励技术，发现猝发随机和正弦快速扫频对于线性系统将产生相似的结果。通常，随机激励总会遭受泄漏的影响，因而测量的质量将会降低。为了说明随机激励测量质量的降低，比较随机激励和猝发随机的测量效果，图 6 放大了系统的第一个共振峰附近区域。随机信号包含太多的变化量，并且在共振峰处幅值出现失真（在此处相干有突变下降尖峰）。此处几乎看起来像有两阶模态，但是实际上这是由泄漏失真所引起的。猝发随机测量得到的共振峰清晰且陡峭。显然，猝发随机激励得到的结果优于随机激励得到的结果。

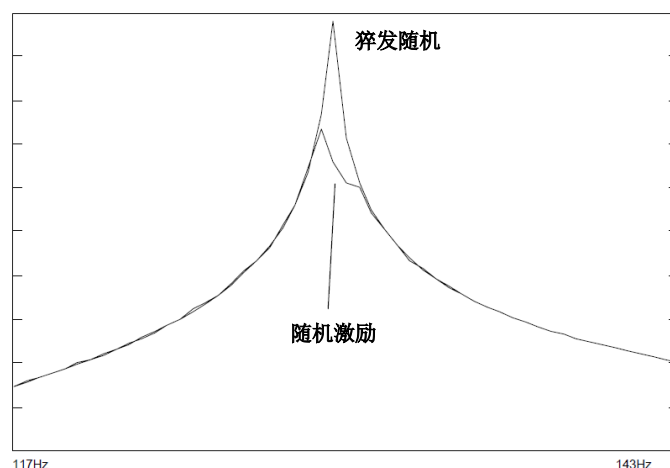


图 6 猝发随机和随机激励得到的 FRF

我们可以花费大量的时间讨论每一种激励技术（还有其他的激励技术没有提到）的所有细节，但是在这没有足够的时间能让我们立刻覆盖每种激励技术的方方面面。可能下次我们会更详细地讨论每一种激励技术。但这次仅是一种快速而简洁的综述，告诉你需要知道哪些东西。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



曲线拟合令我感到迷惑！各种不同的拟合技术意味着什么？  
这有太多的方面需要介绍。

对于大多数人来说，曲线拟合可能是整个实验模态分析过程中最难的部分。事实上，称它为**模态参数估计**更适合些。但是那种叫法已被人们所熟知，所以我们习惯上还是称它为**曲线拟合**。实际上，曲线拟合是我们设法从测量得到的数据中提取模态参数（频率、阻尼和模态振型）的过程。首先，让我们讨论少数几个一般性的知识点。

本质上，我们需要用系统的振动模态去描述系统。例如，图 1 所示的三阶模态系统可以通过下面的频域表达式来描述

$$h_{ij}(j\omega) = \sum_{k=1}^3 \left( \frac{a_{ijk}}{(j\omega - p_k)} + \frac{a_{ijk}^*}{(j\omega - p_k^*)} \right)$$

或者分解成每一阶模态的展开形式

$$h_{ij}(j\omega) = \frac{a_{ij1}}{(j\omega - p_1)} + \frac{a_{ij1}^*}{(j\omega - p_1^*)} + \frac{a_{ij2}}{(j\omega - p_2)} + \frac{a_{ij2}^*}{(j\omega - p_2^*)} + \frac{a_{ij3}}{(j\omega - p_3)} + \frac{a_{ij3}^*}{(j\omega - p_3^*)}$$

现在，随着开始考虑这些测量数据，你的头脑中会迅速出现一些疑问：我需要使用多少个数据点？模型存在多少阶模态？曲线拟合频带之外的模态对结果有何影响？对所有模态可以采用相同的拟合技术吗？何时使用 **SDOF**（单自由度）拟合技术，何时使用 **MDOF**（多自由度）拟合技术？应该使用时域还是频域拟合？（在头脑中出现的最重要的事情，可能还是后悔那天我应该去上模态分析课，而不是去参加聚会）。

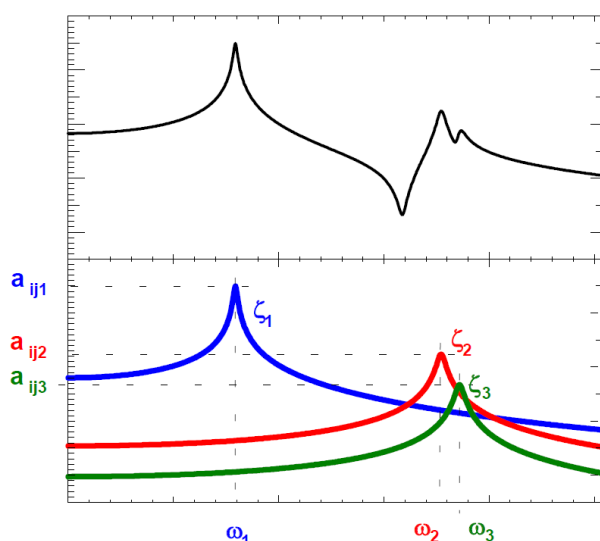


图 1 三阶模态系统

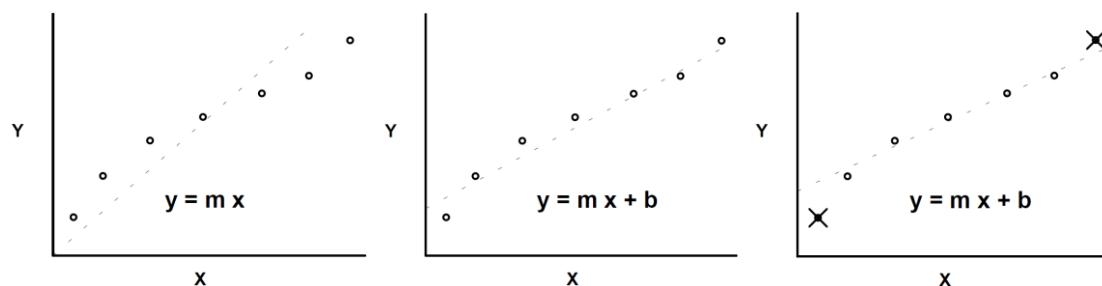


图 2a 力数据通过原点图

2b 考虑补偿

图 2c 仅使用部分数据

首先考虑图 2 所示的一组简单的力传感器校准数据。如果力传感器在零负荷时读数为零，那么图 2a 给出了这组数据的最佳直线拟合，但看起来不是非常合适。但是如果力传感器有一个预加负载，那么可能有必要考虑补偿，如图 2b 所示。如果一些测量数据位于力传感器有效量程之外，那么可能只有一部分数据用于拟合，如图 2c 所示。有人说力传感器是线性的，可用函数  $y = mx + b$  作一阶近似。但我可能会设想用三次函数去作近似，这样描述测量数据可能更优。一定程序上，人人都能理解力传感器这个例子，但是很难认识到测量得到的 FRF 也具有相同的特征。通常，分析人员必须确定模型的阶数、使用的数据量和使用残余补偿项，如图 3 所示。传递函数基本方程通常写成以下形式

$$[H(s)] = \text{下残余项} + \sum_{k=1}^j \left( \frac{[A_k]}{(s-s_k)} + \frac{[A_k^*]}{(s-s_k^*)} \right) + \text{上残余项}$$

基本上，拟合时需要选择一个模态带宽，指定模型的阶数、决定包含残余项。

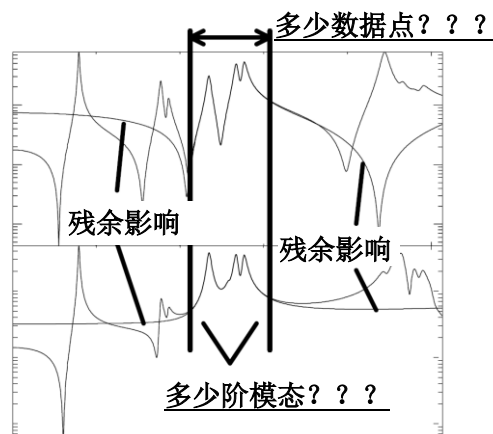


图 3 分析人员的曲线拟合决策示意图

现在我需要知道何时使用 SDOF 或者 MDOF 拟合技术；需要知道从一阶到下一阶模态存在多少阶模态重叠。图 4 展示了一个两自由度系统的各种不同情况。图 4a 表明系统阻尼非常小，各阶模态相隔较远。这类模态可以用 SDOF 拟合技术。图 4b 表明系统阻尼非常小，各阶模态较密集。从一阶到下一阶，模态存在一定的重叠，故 SDOF 拟合不能合理的补偿重叠模态，需要采用 MDOF 拟合这两阶模态。图 4c 表明模态相隔较远，但是阻尼引起了一定的重叠，因此同样需要 MDOF 进行拟合。但是对于后面两种情况，你可能会尝试用 SDOF 拟合技术作补偿，用 MDOF 进行拟合。图 4d 表明模态密集，且阻尼大，对于这种情况宜采用 MDOF 拟合。



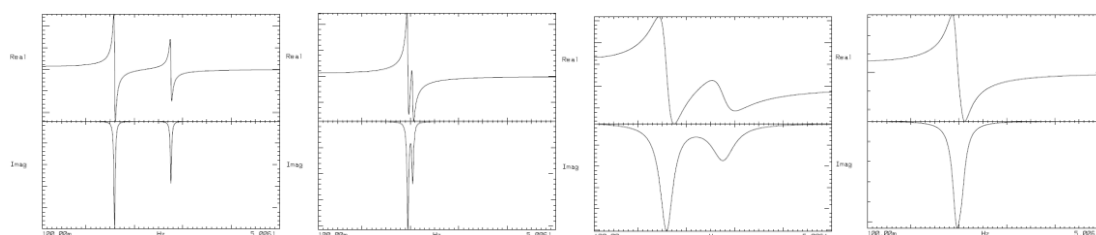


图 4a

图 4b

图 4c

图 4d

最后需要考虑的是使用时域还是频域技术。本质上数学关系是相同的，只是看起来不同而已。很多时候我们以某种给定形式书写数学关系式，是因为这些形式的关系式含有一些数学处理技巧，使得方程更易于求解或从计算角度来考虑求解更高效。但是，本质上，时域和频域是等价的。然而，很多时候我们趋向于对小阻尼系统使用时域技术，大阻尼系统使用频域技术。

考虑图 5，我会思考此次测量采用哪种拟合技术用于参数估计合适。我可能会使用 SDOF 拟合第 1 个峰，但是第 2 和第 3 阶，因模态太密集而不能使用 SDOF 技术，所以最可行的是用 MDOF 拟合这两阶。需要意识到一件事，就是拟合区域不必重叠或覆盖整个频率带宽。我们设法提取模态参数是为了确定系统中每一阶模态的频率、阻尼和留数。

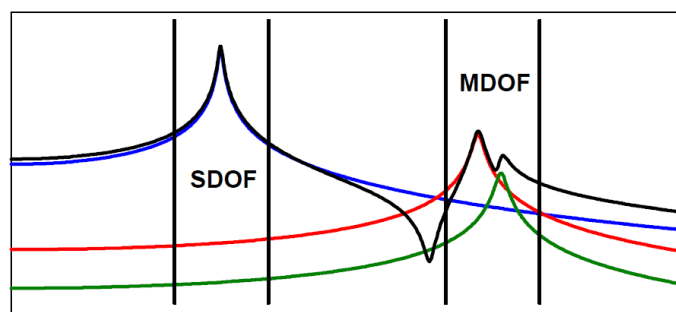


图 5 可能的曲线拟合带宽

我们真的需要花费更多的时间去讨论每种拟合技术的所有细节，但是在这儿没有足够的时间能让我马上覆盖所有拟合技术的方方面面。这只是一种快速而简洁的概述，告诉你一些涉及到的相关概念。想想我们所讨论的，可能下次会更详细地讨论每一种拟合技术。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



我仍不理解曲线拟合……怎样由 FRF 得到模态振型？

好的，让我们看看能否弄清楚这个问题。

到目前为止，模态参数估计（通常称为曲线拟合）或许是大多数人理解实验模态分析最难的部分。我知道我可以写出所有的方程去解释这一点，但是这样做可能会让你极其厌烦。在这，我不仅必须要写出与模态参数估计过程有关的所有方程，而且还要写出从留数到模态振型的方程。当然，留数是另一个抽象概念（我多么希望称它为模态振型而不是留数，因为这样只会更令人迷惑）。

上一篇（99.2）我们讨论了曲线拟合模型和参数估计的基本方程，形式之一为

$$[H(s)] = \text{下残余项} + \sum_{k=1}^j \left( \frac{[A_k]}{(s-s_k)} + \frac{[A_k^*]}{(s-s_k^*)} \right) + \text{上残余项}$$

这些项都以矩阵的形式给出，矩阵  $[A]$  是留数矩阵，从曲线拟合过程中得到。同时从方程的分母中可以得到系统极点，即频率和阻尼。这些留数表明了与模态振型的关系，无须遍历所有过程，二者的相互关系可以用下式表示（展开了一些项）

$$[A(s)]_k = q_k \{u_k\} \{u_k\}^T$$

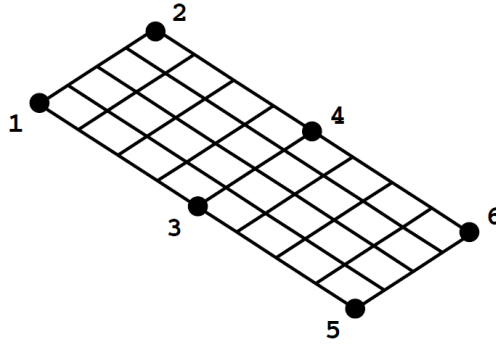
$$\begin{bmatrix} a_{11k} & a_{12k} & a_{13k} & \cdots \\ a_{21k} & a_{22k} & a_{23k} & \cdots \\ a_{31k} & a_{32k} & a_{33k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = q_k \begin{bmatrix} u_{1k}u_{1k} & u_{1k}u_{2k} & u_{1k}u_{3k} & \cdots \\ u_{2k}u_{1k} & u_{2k}u_{2k} & u_{2k}u_{3k} & \cdots \\ u_{3k}u_{1k} & u_{3k}u_{2k} & u_{3k}u_{3k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

如果观察每一列，可以看出矩阵每一列都包含了模态振型信息和比例因子。根据互易性原理，可以看出矩阵每行也包含模态振型信息。考虑某一行，如第一行，那么可以得到

$$\begin{Bmatrix} a_{11k} \\ a_{21k} \\ a_{31k} \\ \vdots \end{Bmatrix} = q_k u_{1k} \begin{Bmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ u_{3k} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

因此，留数仅仅是模态向量乘以一个标量，此标量为模态向量在参考点处的振型值  $u$  和比例常数  $q$  的乘积。比例常数允许模态振型可以用不同的比例常数（如单位模态质量、单位长度等等）来表示。

这儿有些方程，或许可能你已充分理解，也可能完全不理解。解释这个概念的更好途径可能是通过一些简单的图例来说明。在这再次用到以前我们讨论过的平板例子（98.2），可以方便地解释我们怎样由 FRF 得到模态振型（这样你可能理解这些数学公式起什么作用了）。



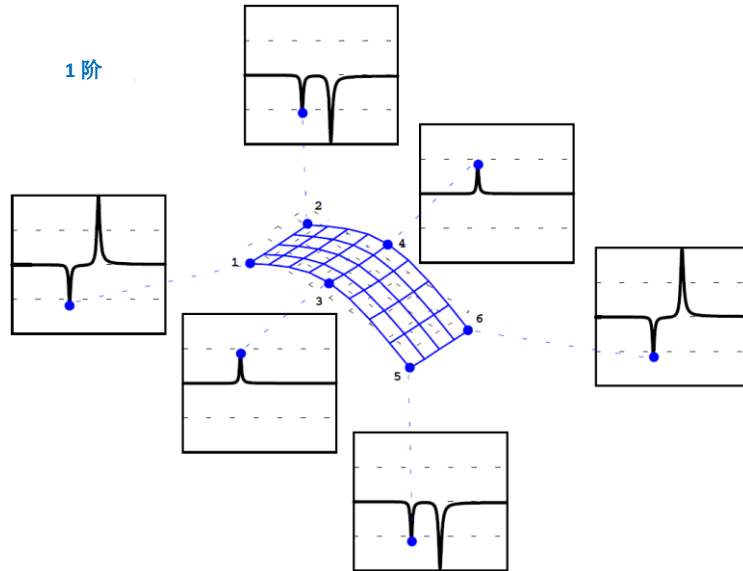
在平板上进行一些测量，总共得到 6 个频响函数：4 个在角点，2 个在中点。我们希望由这 6 个 FRF 能确定前两阶模态振型。考虑频响函数对数形式的幅值，但这不是很有用，因为在频响函数曲线图中所有的峰值都是正值。

更有意义的信息是 FRF 的虚部。它同时表明了幅值和响应的方向，其中方向是最重要的信息。不涉及所有的数学求解过程，我们知道 FRF 虚部的峰值幅值直接与留数相关（而留数与模态振型相关）。近似方程为

$$h(j\omega)|_{\omega \rightarrow \omega_n} = \frac{a_1}{(j\omega_n + \sigma - j\omega_d)} + \frac{a_1^*}{(j\omega_n + \sigma + j\omega_d)}$$

$$a_1 = \sigma h(j\omega)|_{\omega \rightarrow \omega_n}$$

这个方法确定模态振型过于简单，通常称为峰值拾取法，因为我们拾取的是 FRF 的峰值。观察每个测点处的每个 FRF 峰值（在给出的图中，幅值的刻度范围从-1 到+1，虚线为范围的一半，另外，移除了频率轴）。现在首先仅专注第 1 阶模态，然而专注第 2 阶模态。

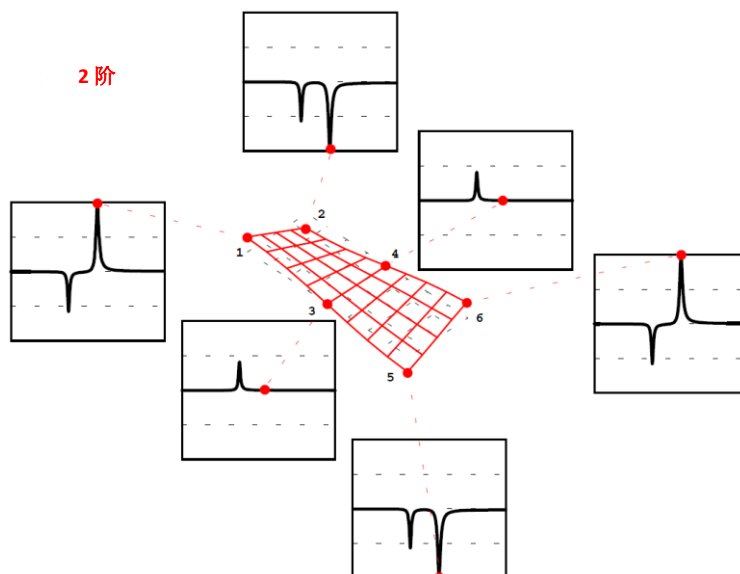


考虑 1 阶模态 1 号测点处的 FRF，注意它的幅值为 0.5，方向为负。2 号测点的幅值也为 0.5，同样也是负方向。这意味着 1 阶模态的 1 点和 2 点以相同的幅值和相同的方向运动。如果考虑 5 号和 6 号测点，可以得到与 1 号和 2 号测点相同的结果。因此，1，2，5 和 6 号测点以相同的幅值和相同的方向运动。

如果仅仅测量这四个测点，那么平板的模态振型看起来像刚体模态（四角点以相同大小的幅值一起沿同一方向运动）。这是用太少的测点描述系统的模态振型时，经常会遭遇的一个普遍性问题。

考虑第 1 阶模态的 3 号测点，注意到幅值为 0.5，但是它的方向为正，4 号测点具有相同的结果。因此 3 号和 4 号测点以相同的幅值和相同的方向一起运动。但是注意到 3 号和 4 号测点运动方向与其余四个测点的运动方向相反。现在，虽然我们可以不必再测量更多测点数据，就可以得到平板的变形模式为弯曲变形，但是如果测量更多的测点，那么得出来的模态振型会更光滑。

考虑第 2 阶模态，遍历所有测点，将会看到 1 号和 2 号测点具有相同的幅值，但是二者的运动方向相反。5 号和 6 号测点相同于 1 号和 2 号测点。但是注意到 1 号和 5 号测点，它们也是反向运动，2 号和 6 号测点也是如此。因此，平板的第 2 阶模态为扭转变形。如果考虑 3 号和 4 号测点，注意到这两个点的幅值为零，这是因为 3 号和 4 号测点是平板扭转模态的节点。同样，增加测点，得到的振型更光滑。



现在我们能明白 **FRF** 虚部的峰值直接与平板的每一阶模态振型相关。不涉及所有的数学知识，留数是从曲线拟合过程中提取出来的，并且直接与平板的模态振型相关。这也表明采用图例使得说明起来更简单。

我希望这些有助于帮助你消除怎样由 **FRF** 得到模态振型的疑惑。回想一下，如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



工作变形和模态振型之间有什么不同? 有时它们看起来一样。

好的, 让我来描述它们之间的差异。

对大多数人来说, 这是一个普遍使人迷惑的地方。部分原因是由于我们使用的字眼引起的 (因为工作变形 operating deflection shapes 中用到 shape 一词, 与模态振型 mode shapes 用词相同, 译者注), 我更宁愿称工作状态下得到的数据为工作变形模式, 不愿意使用振型字眼一词。但是不幸的是, 我不能改变这个名词术语。

首先, 回想一下结构是怎么响应的, 通常由激励引起

$$\mathbf{h}(\mathbf{j}\omega) \times \mathbf{f}(\mathbf{j}\omega) = \mathbf{y}(\mathbf{j}\omega) \quad (1)$$

当然, 我们知道实际施加在结构上的输入力函数是时域形式, 但是可以用频域形式来表示。同样, 结构的响应实际也是时域的形式, 但我们也可以将其表示成频域形式。

对一个受到任意输入激励的结构, 其响应可以通过频响函数乘以输入力函数计算得到, 简单示意过程, 如图 1 所示。

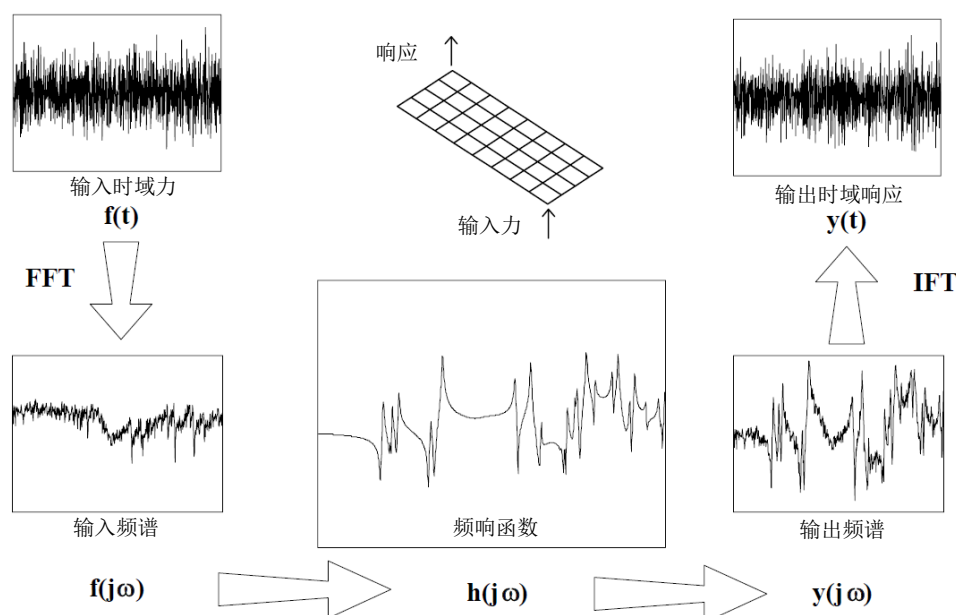


图 1 输入-输出结构响应问题的示意性概述

图中给出的激励是能激起结构所有频率的随机激励, 最重要的是频响函数对激起一些响应的输入力函数起到了滤波器的作用。图示的激励激起了结构的所有模态, 因此, 响应通常是输入力激起的所有模态的线性叠加。如果激励不包含所有频率, 只能激励某一个特定的频率 (在工作状态下, 该频率通常是我们关心的频率), 那么结果将会怎样。

考虑受正弦激励的平板, 假设激励点位置为平板的一个角点。作为示例, 我们假设该正弦激励仅激起了平板前两阶模态 (当然平板的模态有很多阶, 为了简单起见, 我们假设只激

起了前两阶) 的响应。从图 1 和方程 1 可以知道, 确定结构响应的关键是输入和输出位置的 FRF。同样, 我们需要记住的是在采集工作数据时, 我们不测量系统的输入力和 FRF, 仅仅测量系统的响应。

首先, 让我们刚好在平板的第 1 阶固有频率处, 以正弦方式激励该系统, 图 2 为系统响应中的一条 FRF 曲线。因此, 即使只在一个频率处对系统进行激励, 但是我们知道 FRF 起到了滤波器的作用, 决定结构将怎么响应。可以看出, FRF 是由 1 阶和 2 阶模态的贡献组成。同时也可以看出系统的主要响应, 不管是在时域还是频域, 都是 1 阶模态占主导。如果仅在那个频率处测量多个测点位置处的响应, 那么工作变形模式看起来将非常像 1 阶模态振型, 但是这儿还有少量 2 阶模态的贡献。对于工作数据, 我们从不测量输入力或者 FRF, 仅仅测量输出响应。因此测量得到的这些变形是由输入激励所激起的结构的真实响应, 不管输入激励是何种激励。

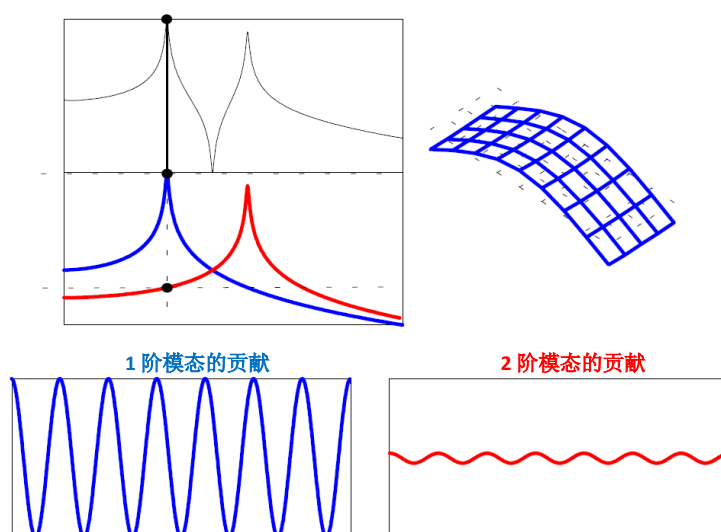


图 2 在 1 阶模态处激励

当我们测量 FRF 和进行模态参数估计时, 实际上是确定单独 1 阶模态, 图中的蓝色表示, 和单独 2 阶模态, 图中红色表示, 以及系统的其他阶模态独自对总 FRF 的贡献。对于工作数据, 我们仅仅是考虑结构在某一特定频率处的响应, 该响应为所有模态对系统总响应的线性组合。所以, 现在我们能明白工作状态下的平板变形模式非常像第 1 阶模态振型, 如果主要激励 1 阶模态。

现在让我们刚好在平板的第 2 阶固有频率处激励该系统。图 3 表明了与刚讨论的 1 阶模态相同的信息。但是我们要明白, 现在主要是激励系统的第 2 阶模态, 再次, 必须认识到响应看起来非常像 2 阶模态振型, 但是这儿还有少量 1 阶模态的贡献。

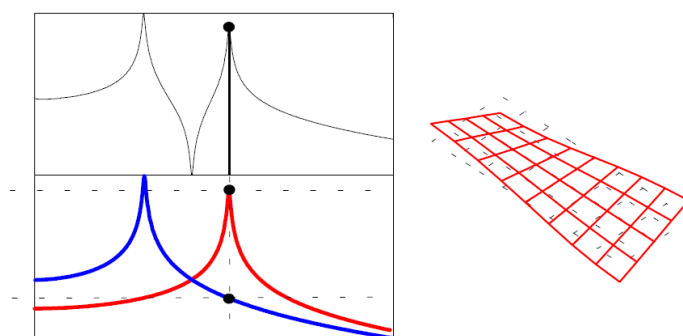


图 3 在 2 阶模态处激励

当远离共振频率激励系统时, 将会发生什么呢? 让我们在 1 阶与 2 阶频率中间激励该系



统。现在从这可以看出模态数据和工作数据之间的真实差异。图 4 给出了结构的变形形状。初看起来，变形形状似乎不像以前我们认识的任何模态振型。但是如果观察时间足够长久，就会发现变形竟然含有部分第 1 阶弯曲变形和部分第 1 阶扭转变形。所以工作数据主要是 1 阶和 2 阶模态振型的某种组合（是的，这儿实际上还有其他阶在里面，但是 1 阶和 2 阶模态是系统响应的主要参与者）。

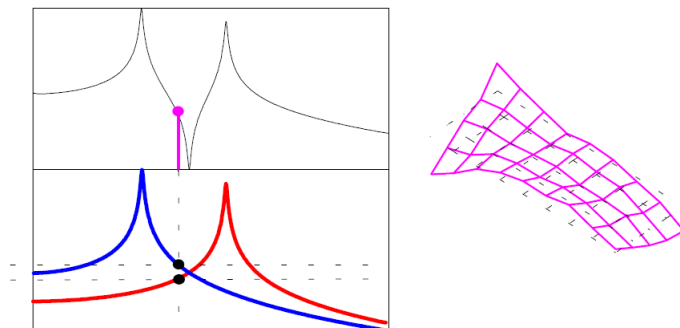


图 4 激励位于 1 阶和 2 阶之间

现在，通过模态基础知识理解了 FRF 对某阶模态的贡献，我们已经讨论了所有方面。当我们实际采集工作数据时，不测量 FRF，仅测量到了系统的输出频谱。如果仅考虑这些输出频谱，可能对于解释为什么工作数据看起来非常像模态振型，还是不够清晰。图 5 给出了在平板某一位置测量得到的输出频谱。施加在结构上的输入是宽频激励，能激起多阶模态。但是，通过理解每一阶模态对工作数据有怎样的贡献，明白所有模态对系统总响应的贡献就相当容易了。因此，实际上，工作变形与模态振型之间有很大的差别：**工作变形模式是模态振型以某种线性方式的组合**。我希望这能帮助你消除工作变形模式与模态振型二者之间不同之处的疑问。

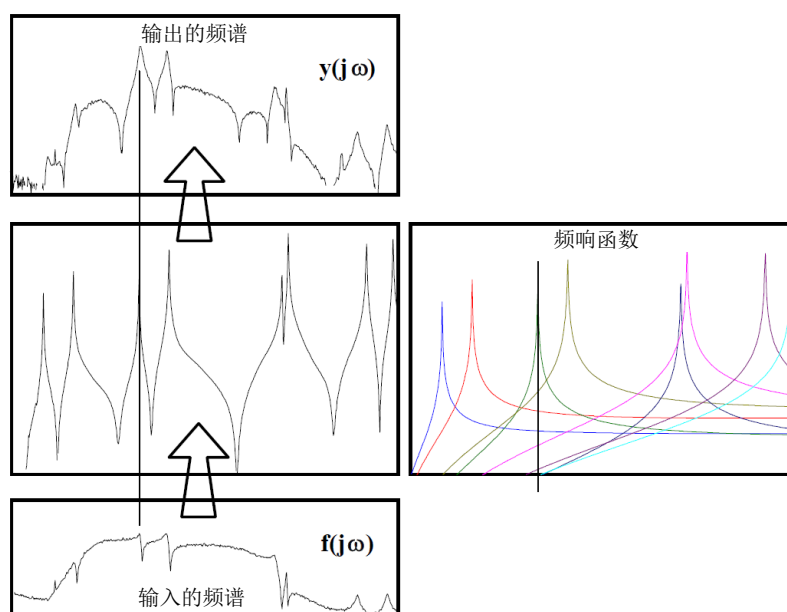


图 5 宽频激励平板

回想一下，如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



确定由  $H$  矩阵的一行或一列就能得到模态振型?

确定! 让我举例说明。

在这仍然使用以前我们讨论过的悬臂梁例子。对于该梁，考虑三个测点位置，总共能得到 9 个可能的输入-输出位置的 FRF。我们已经讨论过，这些 FRF 可由激振器测试或锤击法测试得到。因此，我们已经有了些数用于讨论，梁的模态振型值如图 1 所示（出于讨论目的，采用简单数字表示振型值）。

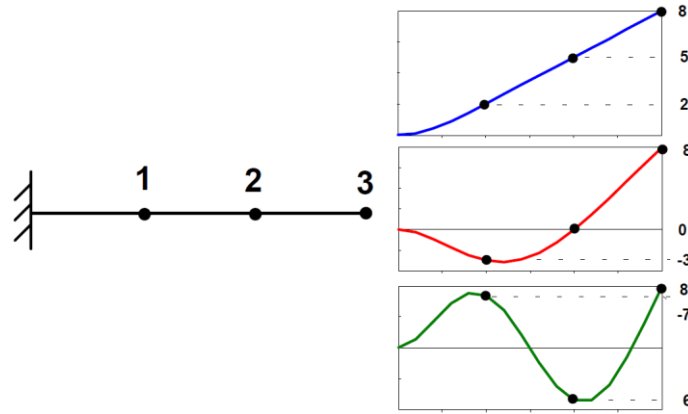


图 1

不久之前，我们已说明了 FRF 的虚部峰值幅值直接与留数相关（留数直接与模态振型相关）。事实上，留数可用下式作近似

$$\mathbf{a}_1 = \sigma \mathbf{h}(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \omega_n}$$

并且可以得到模态振型向量中的单个值

$$\mathbf{a}_{ijk} = \mathbf{q}_k \mathbf{u}_{ik} \mathbf{u}_{jk}$$

现在给出悬臂梁三个测点的 FRF 矩阵图，我可以给出组成 FRF 的任一部分（幅值与相位、实部和虚部），但是对于此次讨论而言，FRF 的虚部提供的信息最重要，因为它包含了幅值和方向，所有 FRF 虚部图中的范围都在-10 到+10 之间，如图 2 所示。

现在用频响函数矩阵的第三行确定第 1 阶模态振型，这就意味着 3 号测点是参考点。如果想为 1 阶模态拾取 FRF 的虚部峰值，此时这些幅值刚好正比例于悬臂梁的第 1 阶振型，如图 3 所示。

观察 1 阶模态在 1, 2, 3 号测点的幅值，其值分别为-2, -5 和-8。这些数值是图 1 所示的 1 阶模态振型值。（注意我已经任意缩放这些数值是为了便于说明。同时也注意到振型可正或负，因为“形状”是相同的。）

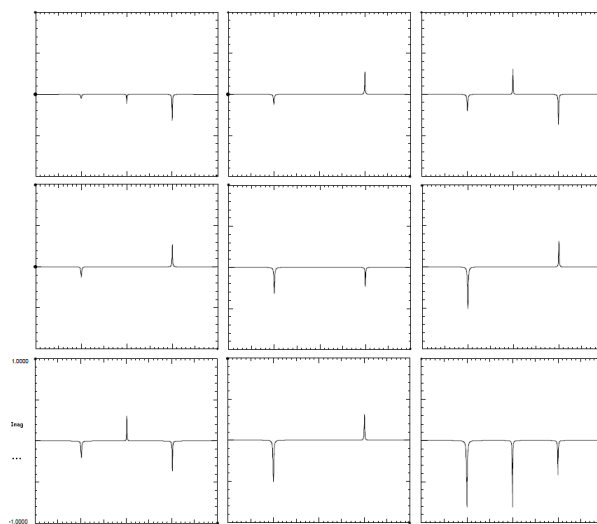


图 2

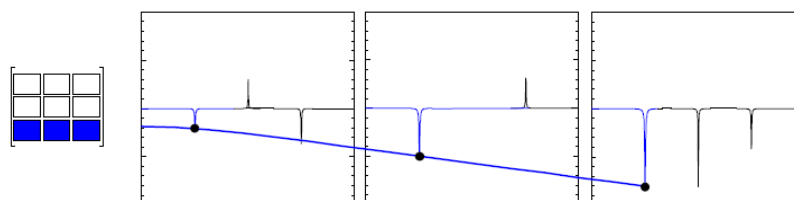


图 3

现在使用 **FRF** 矩阵的第二行。如果仍拾取 1 阶模态的 **FRF** 虚部峰值，这些幅值仍然与悬臂梁的第 1 阶模态振型值成比例，如图 4 所示。

如果观察第 1 阶模态在 1, 2 和 3 号测点的幅值，其值分别约为-1.2, -3.13 和-5。初看起来，这些值与之前的不相同于，但是注意到与前面讨论的情况之间的“比率”或“形状”，会发现二者完全相同。

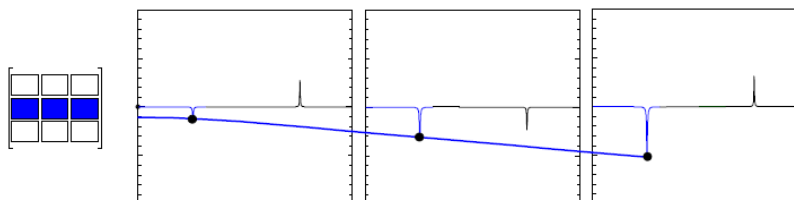


图 4

实际上，如果通过乘以一个比率，可以缩放第三行的模态振型值，该比率为模态振型在参考点 2 处的值（5.0）与模态振型在参考点 3 处的值（8.0）之比。那么可以得到 **FRF** 矩阵的第二行的第 1 阶模态上述的振型值 $[2(5/8)=1.2, 5(5/8)=3.13, 8(5/8)=5]$ 。这样与我由模态振型和留数相关理论得到的预期结果完全相同，因此，对此我一点也不感到吃惊（同样由 **FRF** 矩阵的第一行也可以得到相同的结果）。

因此，我们可以明白由 **FRF** 矩阵任一行都可以得到梁的模态振型。如果还记得互易性成立，那么我们知道 **FRF** 矩阵的行与列包含了相同的信息。因此，也能明白由 **FRF** 矩阵的任一列也可以得到相同的模态振型。所以，这就是为什么我们说，你可以用 **FRF** 矩阵的任一行或任一列去估计模态振型。当然，我可以写出所有相关的方程来说明这一点，但是这些图片形式的描述对于解释这一点已经足够（我知道当我开始写方程时，你有多么讨厌它）。

现在考虑第 2 阶模态，使用 **FRF** 矩阵的第三行。如果为 2 阶模态拾取 **FRF** 的虚部峰值，这些幅值将比例于悬臂梁的第 2 阶模态振型值，如图 5 所示。

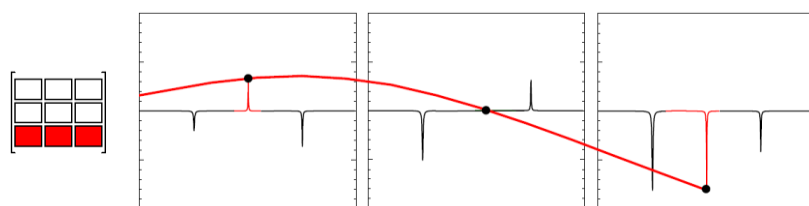


图 5

如果观察位置 1, 2 和 3 号测点的幅值, 其值分别为 3, 0 和 -8。这些值为图 1 所示的模态振型值。

但是当我使用 **FRF** 矩阵的第二行, 考虑第 2 阶模态时, 却发现没有与 2 阶模态相关的信息。这是怎么回事呢? 第 2 阶模态在 2 号测点的振型值为零, 因此, 2 号测点是这阶模态的节点。任何时候, 我们将输入位置或响应位置, 置于某阶模态的节点位置 (振型值为零), 那么从该参考位置将不能得到这阶模态。

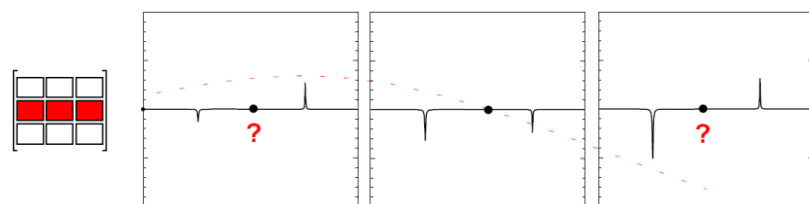


图 6

最后一张图可能有助于你将所有的东西联系在一起。图 7 给出了梁上 15 个测点位置的 **FRF** 虚部的瀑布图, 图 2 所示的 3 个 **FRF** 用彩色表示。在幅图中, 与 1 阶模态相关的信息用蓝色表示, 与 2 阶模态相关的用红色表示, 与 3 阶模态相关的用绿色表示。我们明白模态振型可以由 **FRF** 虚部的峰值得到。由这些图, 能够得出悬臂梁的第 1, 2 和 3 阶弯曲振型。

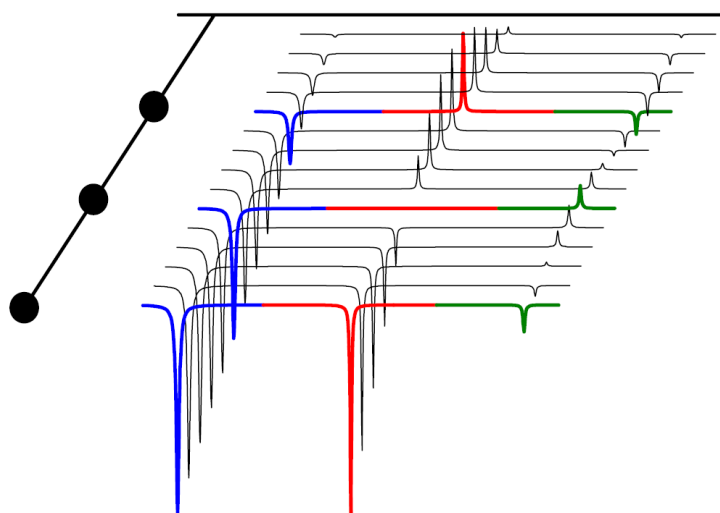


图 7

总之, 我们可以说, 可以使用 **FRF** 矩阵的任一行或任一列去估计系统的任一阶模态, 前提是参考点不位于该阶模态节点上。我希望这些能解答你的疑问。如果你还有模态分析其他问题, 请咨询我。



我听别人说 Pete 不使用窗函数，这是为什么呢？

的确如此，但是你得让我限定一下那种说法的前提条件。当然，许多数据采集情况都必须加窗函数。但是模态测试过程中几乎任何时刻，都可以选择不需要加窗函数的激励方式。首先让我们明白，为什么一些类型的数据采集在数字化和采样处理过程中会失真，需要怎样做才能将失真减小到最小程度，选择特定的测试激励技术是怎样围绕数据采集问题工作的。

我们记得傅立叶变换定义的时域区间是从 $-\infty$ 到 $+\infty$ ，但是我们只能在非常短的时间段内采集数据。只要我们能将采集到的有限时间段内的数据重构到整个时间区间，那么就不存在任何问题。

图 1 时域波形图中分别为单频正弦波、一段采样时间内的波形纪录和由采样得到的时域信号重构后的波形。图 1 也给出了采样得到的时域信号的 FFT 频谱。时域信号变换到频域，得到一条与预期相同的离散谱线。这是因为在采样时间段内刚好捕获了整数倍个周期正弦波，在这种情况下，信号在采样间隔内是周期信号。

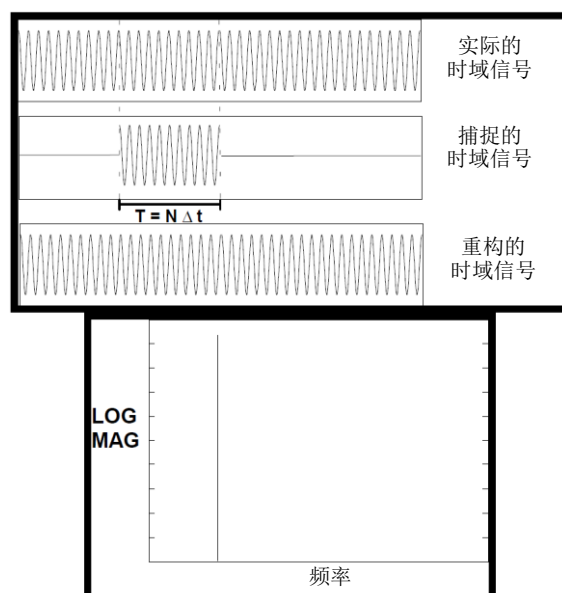


图 1

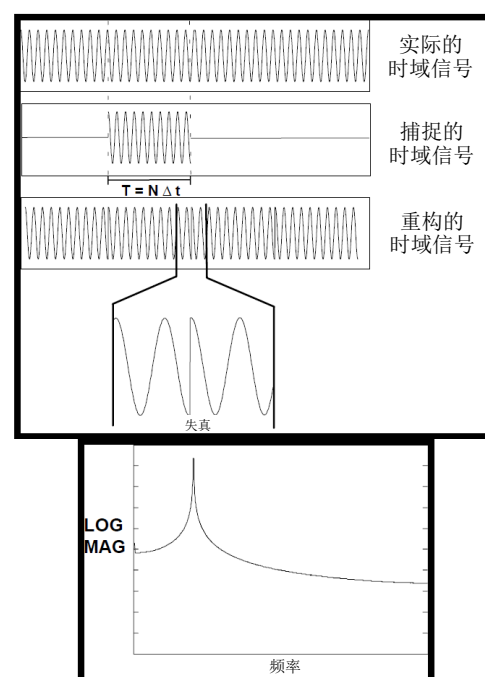


图 2

但是如果情况不是这样，结果又将怎样呢？图 2 给出了这种情况。跟以前一样，图 2 给出了实际信号、采样得到的信号、重构后的信号和采样信号的 FFT 频谱。注意到重构信号波形不连续，但是原始实际信号不存在不连续。这个信号的 FFT 频谱已远远不是我们预期的那种单条离散谱线了。由于采样失真，频谱在整个频带内发生了拖尾现象。这是非常严重的误差，称为泄漏，是数字信号处理所遭遇的最严重误差。但是为什么会出现这种误差呢？

原始实际信号为一条单频正弦波，它的频谱怎么会变得如此失真？这个问题很容易解释。这是因为采样得到的信号不是整数倍个周期信号或者信号不是重复出现。

先暂停一下，回想以前学过有关傅立叶级数的一些基本知识。对于一条单频正弦波，我们知道用傅立叶级数描述该信号是非常容易的。通常用傅立叶级数中的一项就可以描述了，形如  $A_0 \sin \omega t$ 。但是对于一些信号，比如矩形脉冲信号，其傅立叶级数展开会是什么样的呢？我不想立刻进行傅立叶级数展开，但是我想你应该记得傅立叶级数展开项是一系列不同频率和不同幅值的正弦信号之和。对于矩形脉冲，傅立叶级数要包含很多项，才能近似这个信号，这是因为矩形脉冲信号不连续，不像平滑的正弦波。

现在返回到图 2 所示的采样得到的正弦波，可以看出在采样周期内没有捕捉到整数倍个周期正弦波，致使波形发生了失真，*似乎在采样周期的末端波形出现了不连续*。这就解释了为什么 FFT 会在整个频带上发生拖尾现象了。本质上，这需要多个傅立叶展开项去近似这个明显不连续的信号。

为了将这个误差减小到最小程度（注意我说的是减小，而不是消除），我们需要使用加权函数，也叫窗。加窗主要是为了使信号似乎更好地满足 FFT 处理的周期性要求。图 3 为加窗后的时域信号。

现今模态测试中，激振器测试最常用是矩形窗，汉宁窗和平顶窗；锤击法测试最常用的是力窗/指数窗。需要明白的是**所有窗函数都会使数据失真**。不详细叙述这些细节，但需要记住的是窗函数总是会使测到的峰值发生失真，并且总会给出这样的假象：测量得到的 FRF 中的结构阻尼大于结构实际存在的阻尼，而这两个非常重要的属性刚好是我们需要从 FRF 中估计的属性。矩形窗会使得幅值失真 36%，汉宁窗失真 16%。这些窗函数的影响在其频谱图中最易于呈现。所有的窗函数都有特定的形状，这个形状可以确定幅值可能失真的程度、加窗带来的阻尼影响和谱线拖尾程度。

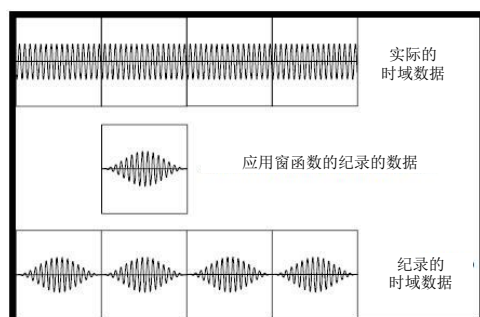


图 3

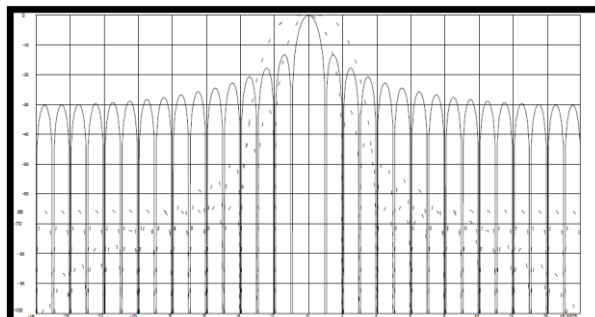


图 4

图 4 给出了矩形窗、汉宁窗和平顶窗的频谱。将来的某一章节我们将会更详细地讨论这些曲线。如果你刚好明白了，虽然在一些测量情况中，窗函数是一个必然的麻烦，但这些窗函数会使数据失真，我会很高兴。

所以我四处宣传对模态测试的 FRF 测量，不使用窗函数。本质上，我是设法使信号满足傅立叶变换的要求：“要么采集周期信号，要么在一个采样间隔内采集能完全观测到的信号”。你想想看，像伪随机、猝发随机、正弦快速扫频和数字步进正弦信号，这些信号在大多数情况下都满足这个要求，因而不存在泄漏，也就不必加窗。有可能下次我们将详细讨论每个窗函数的细节，但在这儿，这个简短的解释对于此已够用了。

现在我希望你能明白为什么我不喜欢使用窗函数了。我将不惜任何代价去避免使用窗函数，但是偶尔，我也别无选择（特别是在家里，我决不能逃避“墙上的窗”！）。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





我对模态所有名词，如拉普拉斯、傅立叶、FRF 等等，仍然不理解！  
你能用一张“全局示意图”将它们联系在一起吗？

的确……有时退后看一幅完整的图片中的每样东西，有助于我们理解某些东西。我有一张使用多年的图片，用它可以帮人们更清楚地明白一些东西，我称它为“全局示意图”。让我们观察这张图片，并且分别讨论其中的各个子块。

首先让我们从一种分析方式入手，比如图示的有限元模型 (FEM)。通常，我们使用 FEM 近似弹簧-集中质量系统表征的物理系统。既然描述分析的近似方法是利用系统每个质量的力平衡，那么我们可以写出每个质量（或自由度）的平衡方程去近似这个系统。因为有限元需要使用许多微单元去准确描述系统，那么就会存在多个方程和多个未知数。这样，使用矩阵描述所有的这些方程会变得很方便。一旦组装完所有方程，使用一种数学方法，称为特征值求解，求得系统的频率和模态振型，使用这些更简单的参数去描述系统，这就是有限元分析过程。

不涉及所有细节，我能将这些方程变换到拉氏域（注意，我并不想因方程变换到拉氏域使你苦不堪言，这样做仅仅是因为在拉氏域方程更易于处理。在这一点上，请相信我！）。在拉氏域，得到系统矩阵  $[B(s)]$  和它的逆矩阵  $[H(s)]$ ，称为系统传递函数。我们知道这个逆矩阵等于系统矩阵的伴随矩阵（或者是系统矩阵的代数余子式）除以系统矩阵的行列式。在所有的振动课本中都有这个逆矩阵的描述（通常在附录 A 中）。

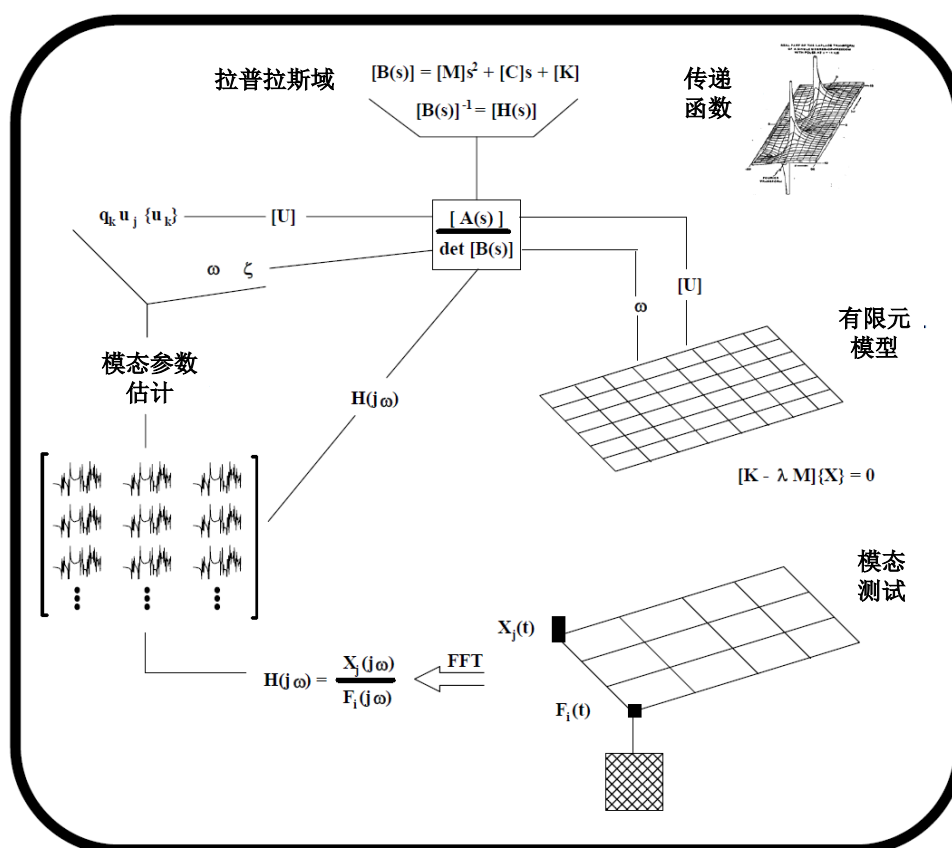
这是个了不起的处理，对你来说意味着什么，你知道吗？原来这个伴随矩阵包含模态向量，我们称它为留数矩阵，矩阵  $[B(s)]$  的行列式包含方程的根，或者称为系统极点。这些基本信息与从分析模型中得到的相同。因此我们可以由分析模型或者由拉氏域描述方法确定系统的动力学特性，两者得到的结果相同。

另一个重要的关系式是频响函数，FRF。这是系统的传递函数沿虚轴（或者称为频率轴） $j\omega$  的估计。FRF 的矩阵表示形式为  $[H(j\omega)]$ 。既然我们用矩阵来处理频响函数，所以用下标可以方便地确定输入-输出位置的 FRF，如由 ‘j’ 点输入激励引起 ‘i’ 点输出响应，那么 FRF 为  $h_{ij}(j\omega)$ 。

记得系统传递函数由质量、阻尼和刚度定义。那么可以计算或者综合任何感兴趣频带内任一输入-输出位置的传递函数。所以如果需要，我们可以综合出矩阵中的一些 FRF 元素，组成 FRF 矩阵中完整一行或一列，如图所示。

我们需要认识到这些综合出来的 FRF 包含的信息与系统特性有关。这些 FRF 能够由留数和系统极点生成，而留数直接与模态振型相关，极点是系统的频率和阻尼。

所以组成 FRF 的参数正是我们希望从 FRF 中提取的参数。这就是模态参数估计过程。通常我们通过数学运算从 FRF 中提取组成 FRF 的参数：频率、阻尼和模态振型。这个过程通常称为曲线拟合。提取的基本信息是模态振型和系统极点，而模态振型与包含在系统伴随矩阵中的信息或留数矩阵相关，极点信息与系统矩阵的行列式相关。



这已经非常接近总结模态分析全过程了，除了还需要强调其中重要的一点之外。到目前为止，我们只讨论了由有限元模型或者系统的拉氏域描述方法，使用质量、阻尼和刚度近似计算系统动力学特性。这两个方法都是使用物理参数：质量，阻尼和刚度的近似去描述系统，因此两种方法提供相同的基本信息。如果还有其他方法估算这些 FRF，不用假设物理属性，那就是应用模态参数估计技术去提取这些想要的信息。

到这才开始模态测试。基本上，用一些测量的力激励结构，由外力激起的系统响应连同外力一起测量。将时域数据通过 FFT 变换到频域，进一步计算输出响应与输入力之比作为 FRF 的近似。

还有许多应用与这些 FRF 测量相关，包括数字信号处理等概念，因为这些太复杂，故在这不作详细讨论（我想在以后某章节中你能明白这些）。

现在我们可以用这个方法测量一个输入-输出 FRF 了。如果使用一个激振器激励结构，逐点移动加速度计，那么可以得到 FRF 矩阵的一列（如果采用锤击激励，移动力锤，那么可以得到 FRF 矩阵的一行）。所以模态测量最大的优势在于测量由外力引起的系统响应，永远不作任何有关系统质量、阻尼和刚度的假设，这样避免了任何可能的错误性近似。当然我需要确保我进行的是高质量的测量，否则将会使系统特性失真。

我希望这些能消除你的疑问，如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



向他人展示模态振型，他们问我结构设计是否合理。  
我该怎样回答他们？

如果我每次听到这个问题，就能得到一美元，那么我可能很富有了。基本回答是：你没有足够的信息用于回答这个问题，仅有模态振型，是不足的。问这个问题的人，他们自己也不清楚到底想问什么，你不得不非常圆滑地告诉他们，这是个傻瓜问题。

他们喜欢问这个问题的理由之一是因为你可能给他们展示了振型动画，此时他们的印象是结构正在发生变形（因为他们从计算机屏幕上看到了结构正在发生变形）。当然，你知道那只是结构在遭受到激励那阶模态的外力作用下结构特有的模态振型。有时我说，“让我们增加振型动画的幅度，看能否在计算机屏幕上破坏该结构”（当然，这是非常可笑的！这是不可能发生的）。我使用这种表述是为了解释什么是振型。振型动画只是一种显示机制，让人理解如果结构受外力作用激起了那阶模态，结构可能怎样变形。

关键因素之一就是我们需要知道这个外力。出于某些原因，人们忽略了我们施加一个力作用在系统上，以便得到响应。系统的物理运动方程为

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{F}(\mathbf{t})\}$$

模态空间的等价形式为

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}} \\ \end{bmatrix} \{\ddot{\mathbf{p}}\} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} \\ \end{bmatrix} \{\dot{\mathbf{p}}\} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}} \\ \end{bmatrix} \{\mathbf{p}\} = [\mathbf{U}]^T \{\mathbf{F}\}$$

注意在方程的右边有作用的外力。当求解系统的特征方程时，我们假设方程右边没有外力。这就是我们得到系统动力学特性的过程。考察系统动态特性的一个途径用系统模态，系统模态恰恰是一组经过精心挑选的滤波器，在每个频率成分处对输入信号有放大和削弱的能力。如果仅仅考虑滤波器本身，对于某一特定的应用，我们能作出滤波器是否合适的评判吗？当然不能！我们能说的就是滤波器本身具有的一些特性，这些特性与中心频率、衰减和一些增益设置有关，如图 1 所示。

一个结构的动力特性是完全相同的，我们能够确定每阶模态（每个滤波器），因为它有一个固有频率（中心频率）、阻尼（衰减）和留数/模态振型（增益）。我们需要清楚地明白一点：模态振型只是结构的一个特征，我们不能确定某阶模态是好还是差，除非我们知道力函数，也就是方程右边项。

作为另一个例子，我们想确定一根悬臂梁的刚度。我们可以在实验室里，对悬臂梁的自由端作用一个力，然后测量由此力引起的位移。因而可以确定梁的刚度，形如  $\mathbf{K} = \mathbf{F} / \mathbf{X}$ 。刚度是梁的一个非常重要的参数或特征。但是一旦确定了刚度，我能知道此梁是否失效吗？当然不能！我需要知道实际作用在梁上的力的大小，难道不是这样吗？你要知道，在实验室里测试，为了确定梁的刚度特性，我们作用了一个任意大小的力，然后测量由此力引起的位

移。在计算真实位移之前，需要知道实际作用力的大小。然后我需要一些已经明确定义的规范，该规范用于说明怎样评价结构在设计载荷或实际外力作用下的承载能力。当然这又是另一个重要方面了。

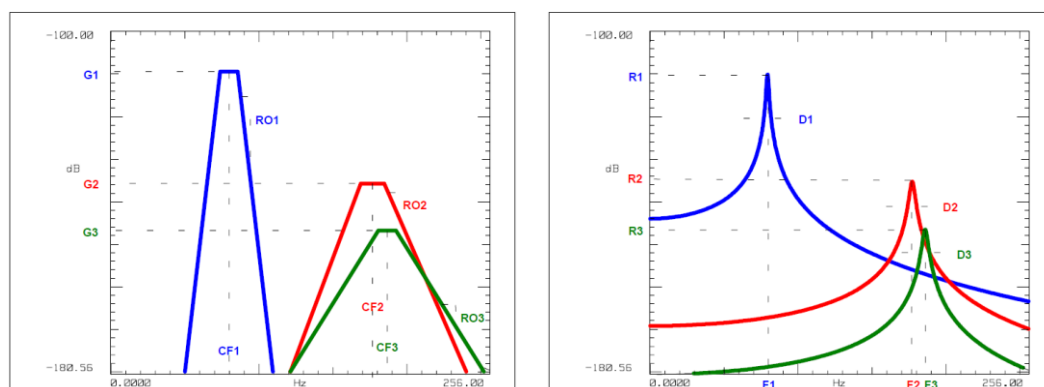


图 1

人们经常忽略的事情是，一旦得到模态振型和指定了动力学设计载荷后，是可以计算结构响应的，但是需要明确一个规范，用于定义多大的响应是可接受的，多大的是不可接受的。有时，这可能是结构动力响应建模过程中最让人感受挫败的部分之一。可以计算结构响应，但是没有人能明确定义结构响应的可接受量级。很多时候在提取形象的振型动画过程中，这是容易被忽略的重要细节。然后每个人都会问：多大的变形是可接受的，部件的寿命多长，总体“感觉”是否良好，响应是否太嘈杂等等问题。

现在我们已经讨论了几个方面，让我们返回到以前讨论过的平板例子，以前关心的是模态分析过程中不同的方面。图 2 为一个典型的强迫振动问题示意图，其中作用力是时域形式。时域信号非常令人迷惑，如果通过 FFT 变换，将时域信号变换到频域，这将有助于我们确定这个力的一些重要特征。力函数乘以频响函数能得到系统输出响应，如果想要的话，响应也可以转换到时域。这儿最重要的一点是 FRF 乘以力谱得到系统响应。

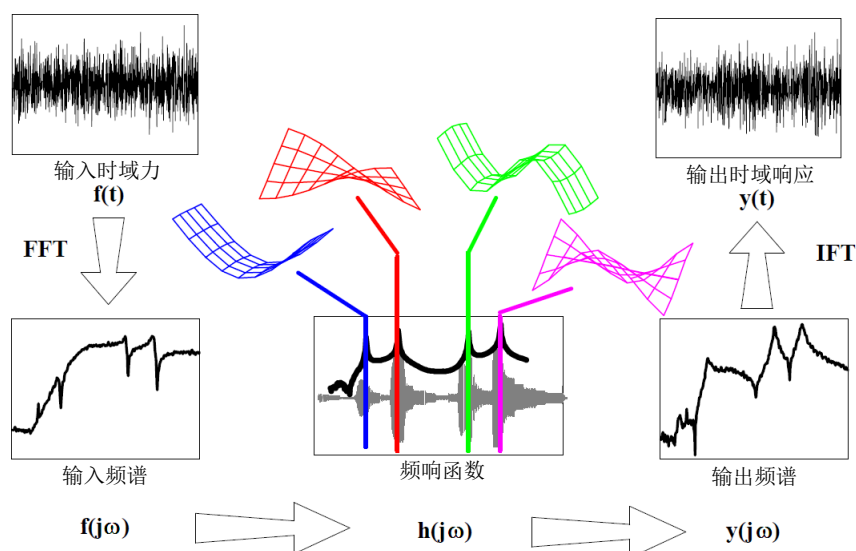


图 2

这意味着通过这个乘法运算，输入力谱被放大或削弱了。FRF 在每个频率成分处控制着力谱怎样被放大或削弱。在上图中，FRF 似乎对图示的四阶模态都有贡献。那是假设外力作用点和响应位置是系统这四阶模态中每一阶的参与者。

但是如果外力作用位置是一阶模态的节点，结果会怎样？现在假设外力作用在沿平板长

度方向的对称线上，那么作用在该位置上的外力将不能激起任何扭转模态，因而，我们可以说这些模态不参与此作用力引起的结构响应。对于响应位置，也有相同的结论。因此我们能明白输入和输出位置二者对系统响应都有影响（事实上，模态振型幅值对多少模态参与系统总响应有严重影响）。

虽然我们可以说某些模态可能不参与系统响应，但并不意味着这些模态不存在，它们只是不参与系统响应计算而已。但这些模态仍然是存在的，它们也定义系统的动力学特性。依赖外力的作用位置和响应的测量位置（同样也是信号的频率成分），将决定结构怎样响应。一些模态在系统响应中可能占主要地位，而其他一些可能占次要地位，这依赖于特定输入-输出位置选择。但是所有的模态都是存在的，它们只是可能没有同时被激起。

我们需要记住的是模态测试仅仅是确定系统的动态特性。我们同时测量一个任意力和由该力引起的系统响应，这就使得我们可以确定系统的动态特性：频率、阻尼和模态振型。这只是系统动态特性。我们显示模态振型（以动画的形式）是为了更好的理解结构在外力作用下可能发生的变形，该力可能激起系统的一阶或多阶模态。记住，模态分析时在运动方程右边不考虑外力这一项，模态振型是不依赖外力的。

现在我希望你能明白为什么你不能回答你之前问的那个问题了。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



模态测试 x 向激励得到了一些模态，y 向激励得到了另外一些模态，我可以用倾角激励代替吗？

这是个相当不错的问题。激振器进行模态测试时，这个问题经常出现。当然，激振器倾角激励结构进行模态测试，是完全可接受的。但是我们唯一需要注意的是要确保我们选择的参考点不是模态节点。让我们详细地讨论这一点。

以一个简单结构开始此次讨论，该结构的模态振型具有明显的方向性。振型具有方向性是指结构某阶模态所对应的响应主要是在一个方向上，其他方向的响应很小或者没有响应，而结构的另一阶模态所对应的响应主要是在另一个方向，其他方向的响应很小或者没有响应。

为了说明这一点，考虑图 1 所示的非常简单的框架结构。可以看出结构的 1 阶模态主要在水平方向运动，在垂直方向的运动非常小。然而，结构的 2 阶模态主要是在垂直方向运动，在水平方向的运动非常小。同样可以看出 3 阶和 4 阶模态也遵循相同的运动趋势，5 阶和 6 阶模态在水平和垂直方向都有运动，但是垂直方向运动稍稍突出些。

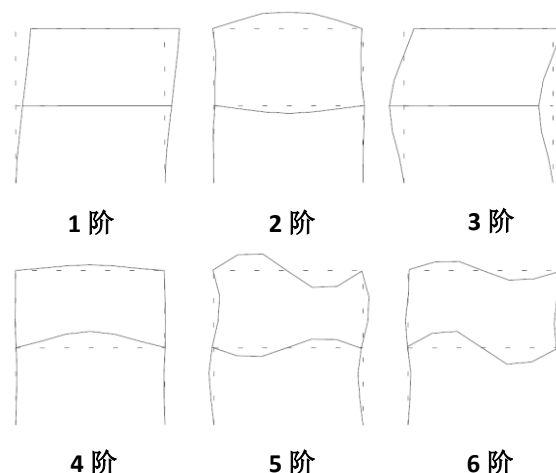


图 1

如果考虑在垂直方向进行驱动点测量，频率带宽覆盖结构前 6 阶模态，如图 2 所示。注意到频响函数曲线只有 2 个共振峰可见，而我们知道在这个频率范围内结构有六阶模态。如果我们在水平方向进行驱动点测量，频响函数曲线也只有 4 个共振峰可见。通过仔细检查，我们注意到这两次测量得到的前两个频率是不同的。

因此，我们能够明白，结构前六阶模态在每一次测量中都不能完全可见。这直接意味着如果我们选择图 2 所示的两次测点中的任一个作为参考点，那么显然，我们得不到结构的所有模态。为什么会这样呢？



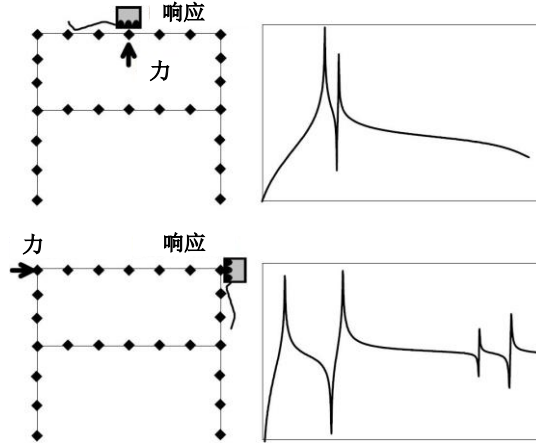


图 2

让我们回想一下频响函数方程

$$\mathbf{h}_{ij}(\mathbf{j}\omega) = \sum_{k=1}^m \left( \frac{\mathbf{a}_{ijk}}{(\mathbf{j}\omega - \mathbf{p}_k)} + \frac{\mathbf{a}_{ijk}^*}{(\mathbf{j}\omega - \mathbf{p}_k^*)} \right)$$

将其展开成前 3 阶模态的形式（这仅仅是为了说明的需要）

$$\mathbf{h}_{ij}(\mathbf{j}\omega) = \frac{\mathbf{a}_{ij1}}{(\mathbf{j}\omega - \mathbf{p}_1)} + \frac{\mathbf{a}_{ij1}^*}{(\mathbf{j}\omega - \mathbf{p}_1^*)} + \frac{\mathbf{a}_{ij2}}{(\mathbf{j}\omega - \mathbf{p}_2)} + \frac{\mathbf{a}_{ij2}^*}{(\mathbf{j}\omega - \mathbf{p}_2^*)} + \frac{\mathbf{a}_{ij3}}{(\mathbf{j}\omega - \mathbf{p}_3)} + \frac{\mathbf{a}_{ij3}^*}{(\mathbf{j}\omega - \mathbf{p}_3^*)}$$

这个方程通过系统每阶模态的留数（分子）和极点（分母）来描述，我们还记得留数直接与模态振型（和一个比例因子）相关

$$\mathbf{a}_{ijk} = \mathbf{q}_k \mathbf{u}_{ik} \mathbf{u}_{jk}$$

因此，频响函数可以用留数或者模态振型表示。当用模态振型表示时，那么方程将变得很直观：如果模态振型在参考点的值为零（或者几乎为零），那么该阶模态在频响函数中将不可见。因此，进行一次高质量的模态测试的诀窍就是合理选择一个参考点，由此参考点，所有模态在 FRF 中一直可见。但是有些时候，说起来容易做起来难，特别当我们不知道预期的系统模态振型是什么样子的時候（这样总是容易成为放马后炮的人）。

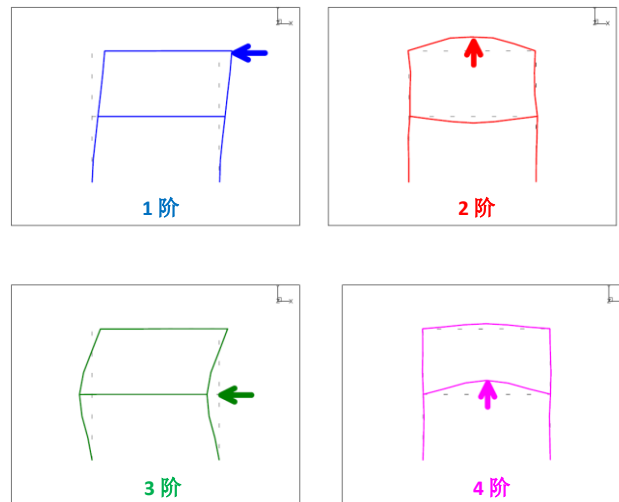


图 3

现在单独考虑系统前四阶模态，那么易于明白最合适的参考点位置是结构上模态振型值

最大的点。但是我很快意识到对于每阶模态而言，最合适的参考点位置都是不同的。这时选择的技巧是，由选择的参考点能“相对合适”地观测到系统每阶模态。用直角坐标系  $x$ ,  $y$  和  $z$  坐标设法将这个点标识出来，到底该选择哪一点，许多人都会举棋不定。

如果设法施加一个外力，沿整体直角坐标系 45 度方向作用于该结构，那样结果会怎样呢？为了测量到所有感兴趣的模态，此参考点是否合理？

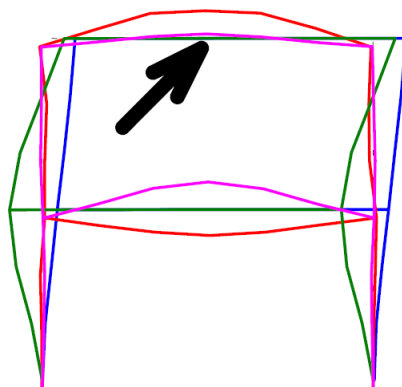


图 4

回答这些问题的最佳途径是考察形成频响函数的方程。我们知道方程可以用模态振型来表示。考虑系统前四阶模态，注意到这几阶模态在 45 度方向都有响应分量。这就意味着这个参考点对于测量系统前四阶模态是合适的。然而，如果作进一步考察，考虑 5 阶和 6 阶模态，那么将会迅速发现由该参考点不能测量到这两阶模态。这是因为，横梁的中点是结构 5 阶和 6 阶模态的节点。

因此我们可以选择任何一点，甚至包括与整体坐标成某一定角度的测点作为参考点。选择参考点的唯一要求是模态振型在该点的振型值要显著，如果选择的参考点是某阶模态的节点，那么测量的响应中将没有那阶模态的响应。最后需要提及的是，为了获得有效的“缩放的模态振型”，必须有驱动点测量（将在以后的章节中讲述模态振型缩放）。这意味着测量响应必须与外力在**同一测点**和**同一方向**，这同样也适用于与整体坐标成一定角度的参考点测量。

我希望这些解释能让你明白，你可以选择参考点沿任何一个角度，只要不是模态节点。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。

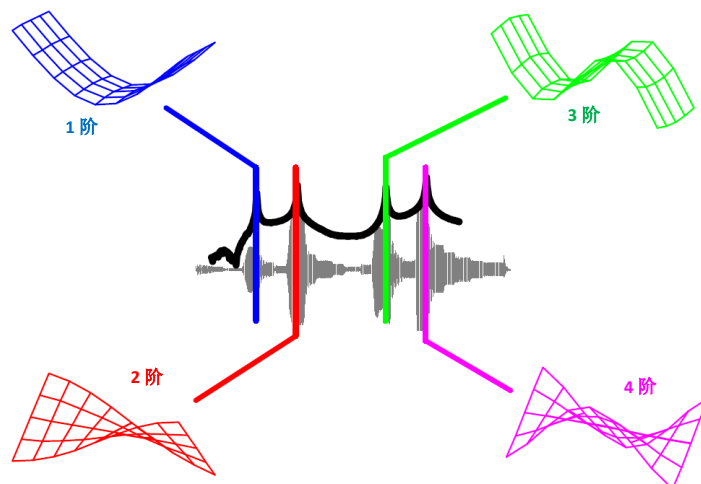


模态测试时，测点数目多少足够？

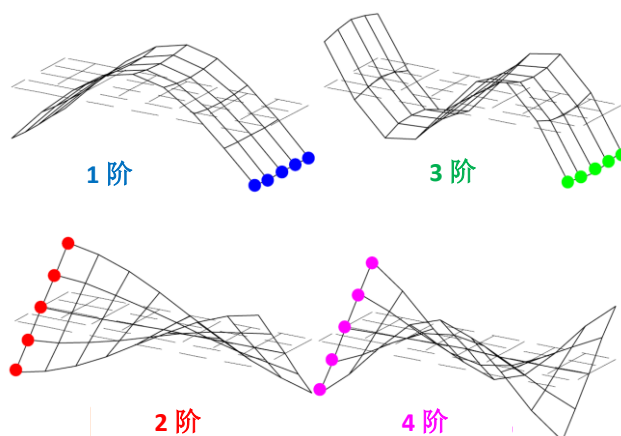
让我们来探讨一下。

我一直希望你最终能抽时间来问我这个问题。这是另一个一直被问到的问题。通常最简单的回答是你需要测量足够数目的测点，使得你能唯一地描述系统所有关心的模态振型。这个答案可能完全不直观，我们需要进一步讨论它。

还是考虑以前讨论过的简单平板结构。由图示的模态振型，我们能够明白描述结构每阶模态振型的测点是足够的，平板总共有 45 个测点。

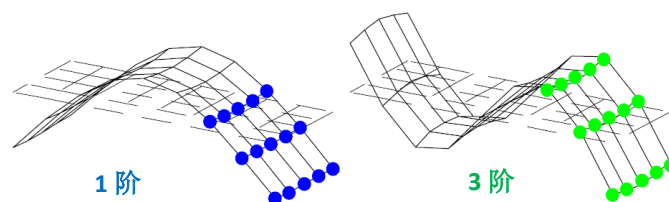


为了说明一些重要的观点，现在考虑沿短边只有 5 个测点的情况。如果考虑 1 阶和 3 阶模态，我们立刻意识到没有足够的测点充分描述这两阶模态之间的差异，考虑 2 阶和 4 阶模态，同样也能得出相同的结论。

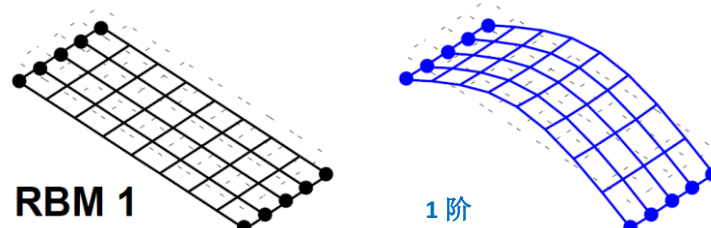


我想我们所有人都意识到仅有 5 个测点不能充分描述模态振型。如果用 15 个测点，能充分描述模态振型吗？极有可能，但是严重依赖这 15 个测点的**确切位置**。考虑 15 个测点的

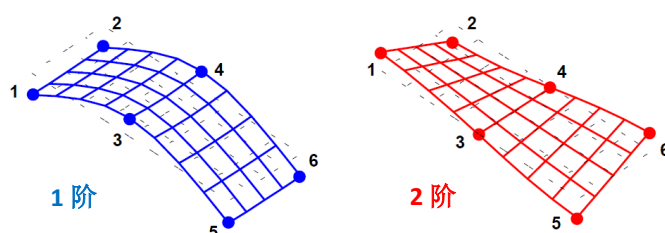
情况，但是我打算选择 15 个位置去说明一个观点。选择如下图所示的 15 个点，那么很难区分 1 阶和 3 阶模态。实际上，这时这两阶模态振型看起来几乎完全相同。



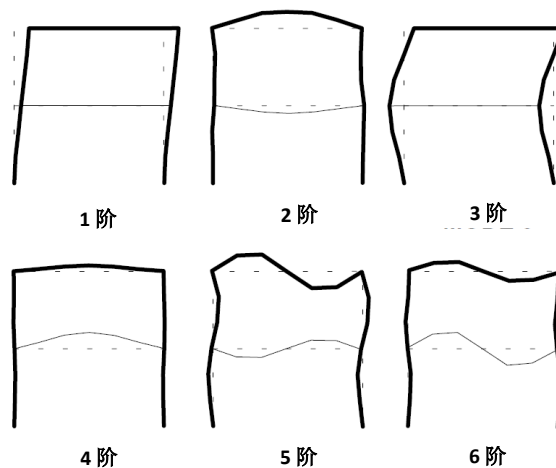
如果沿着平板的前端和后端边缘进行测量，如下图所示。那么你将很难区分第 1 阶刚体模态（RBM）和第 1 阶弹性弯曲模态之间有什么不同之处。



从上面讨论的各种情况可以明显看出，我们需要合理地分布测点位置，以便每阶模态振型都能唯一地区分开来。如果我只对 1 阶和 2 阶模态感兴趣，那么可能只需要 6 个测点就能得到相当不错的描述，如下图所示。但是如果测点数再少一些，那么区分这两阶模态就很困难了，特别是需要区分刚体模态和弹性模态时。

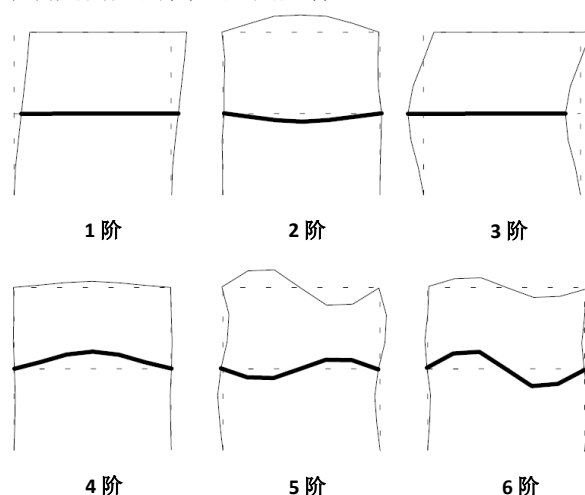


现在考虑另一个例子，如图所示的框架结构。假设只有三个外表面能够测量到。如果只能在这三个外表面采集数据，而不能在结构内部横梁上进行任何测量，那么对于唯一描述模态振型来说，测点数目是不足够的。仅考虑 2 阶和 4 阶模态，其中一阶模态两根横梁彼此相位异步；而另一阶模态两根横梁彼此相位同步。考虑 5 阶和 6 阶模态，结果也是如此。如果没有内部横梁的测量数据可用，那么将很难区分这类模态振型。许多模态测试中，普遍存在这样的问题。由于很难对结构所有模态活跃的结构部分进行测量，只用少数测点去描述模态振型。



模态测试另一个普遍遭遇的问题是测试工程师不愿测量与结构相邻的部分。典型的意见是我们只对结构的一部分感兴趣，因而测量此部分才是我们的责任范围，对结构其余部分，我们不感兴趣，因为它不在我们的管辖范围之内。为了说明这种观点所存在的问题，我们还是采用前面的框架结构作为例子。

但是这次只在结构的内部横梁上采集模态数据，我们立刻就能看出一些模态振型信息严重受外部结构控制。如果不测量足够的信息去充分描述模态振型，那么当我们盲目地限制了测量数据时，可能很难确定问题的真正原因是什么。



这使我想起了最近对一个棘手的扭转振动台系统进行的模态测试。人们关注解决他们的问题，只关心他们职责范围内的夹具和测试对象。他们的印象是振动台系统和支承结构不在他们关心范围之内。但实际上，其他结构是造成问题的罪魁祸首。夹具和测试对象上的局部响应很大程度上是由系统的一些整体模态引起的。不测量这些信息，你不可能有足够的数据去解决或明白那个问题。

现在我希望你对模态测试需要多少个测点足够有更深刻的理解，足够数目的测点才能唯一地确定模态振型。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



有人告诉我说结构动力学修改不起作用，因为得不到系统所有的模态。

好的，让我们谈谈这个方面。

结构动力学修改（SDM）成为一个受欢迎的工具是在上世纪 80 年代早期。由于对 SDM 技术上的一些误解，导致得出了一些错误的结论。但是假设在正确的情况下，SDM 是个功能强大的工具，能够帮助设计工程师们做出高水平的设计方案。首先，让我们简要地回顾一下 SDM 技术，并表明这些技术对模态最重要的问题——模态截断，是如何敏感的。

SDM 是一个分析工具，主要是用模态数据（分析数据或实验数据）去估计系统的动态特性如何随系统的质量、阻尼和刚度这些基本量发生变化而变化。注意仅仅是用模态数据（频率、阻尼和模态振型）预测动态特性的改变，原始的 FEM 数据或者测试数据不需要做任何修改。然而，一旦进行了结构动力学修改，强烈建议再次分析修改后的 FEM 或者再次测试修改后的被测对象。

对系统的物理方程求解，获得特征值。模态数据可由分析模型或者实测数据获得。物理系统在模态空间的模态表达形式为

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}} \\ \end{bmatrix} \{\ddot{\mathbf{p}}\} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} \\ \end{bmatrix} \{\dot{\mathbf{p}}\} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}} \\ \end{bmatrix} \{\mathbf{p}\} = [\mathbf{U}]^T \{\mathbf{F}\}$$

现在改变物理系统的质量  $\Delta\mathbf{M}$ 、阻尼  $\Delta\mathbf{C}$  和刚度  $\Delta\mathbf{K}$ ，在模态空间的表示为（通过模态转换方程）

$$[\Delta\bar{\mathbf{M}}] = [\mathbf{U}]^T [\Delta\mathbf{M}] [\mathbf{U}]; [\Delta\bar{\mathbf{C}}] = [\mathbf{U}]^T [\Delta\mathbf{C}] [\mathbf{U}]; [\Delta\bar{\mathbf{K}}] = [\mathbf{U}]^T [\Delta\mathbf{K}] [\mathbf{U}]$$

假设系统为比例阻尼系统，对修改后的系统进行特征值求解。求解过程中最重要的一部分是通过下式计算系统的最终物理模态

$$[\mathbf{U}_2] = [\mathbf{U}_{12}] [\mathbf{U}_1]$$

这意味着修改后的系统的最终模态是修改前原始系统模态的线性组合。这是个相当重要的方程，用它可以表明预测结果的截断影响。

让我们考虑一根自由梁，对它进行两个简单的结构修改，使之成为简支梁和悬臂梁。使用两根接地的弹簧对结构进行修改，写出 SDM 方程以便获得修改后的频率和模态振型。原始未修改的频率和修改后的频率如表 1 所示（注意：斜体表示的频率是系统约束模态的一种近似，不属于本节讨论的范畴）。

注意到仅使用原始未修改系统的前五阶模态，就获得了修改后的简支梁非常精确的模态，然而悬臂梁却做不到这一点。为什么简支梁可以得到如此好的结果，而悬臂梁却不行呢？答案是修改后的模态振型是怎样由原始未修改系统的模态形成的。



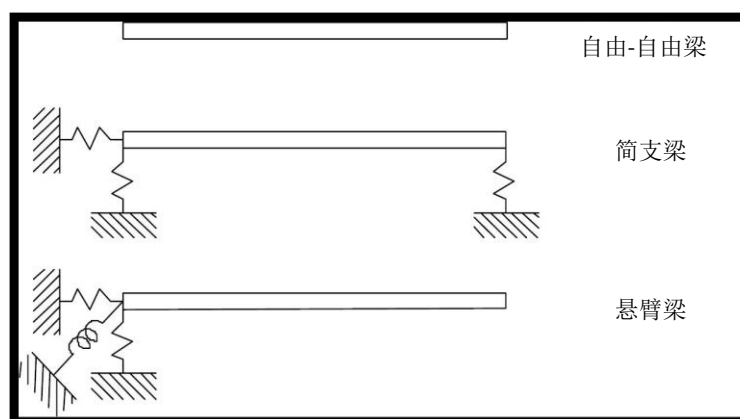


图 1 用于估计的模型

表 1 不同系统的频率

#	自由梁	简支梁		悬臂梁	
		参考值	SDM	参考值	SDM
1	0	71.9	72.0	21.6	24.8
2	0	285.7	288.4	139.3	162.8
3	128	636.5	646.0	396.1	476.0
4	367	1114.9	9108.3	781.8	1274.5
5	738	1706.3	9593.6	1292.0	9437.8

修改后的简支梁模态很容易由原始系统未修改的模态的线性组合得到。观察图 2，注意到原始系统的 1 阶和 3 阶模态是最终修改后的简支梁的第 1 阶模态的最主要贡献者。观察图 3，注意到原始系统的 2 阶和 4 阶模态是最终修改后的简支梁的第 2 阶模态的最主要贡献者。

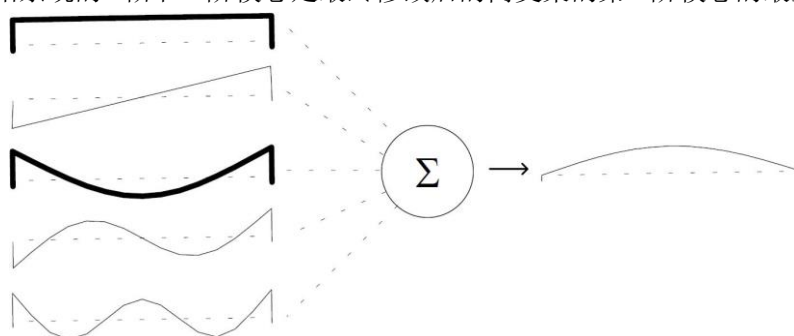


图 2 简支梁的第 1 阶模态

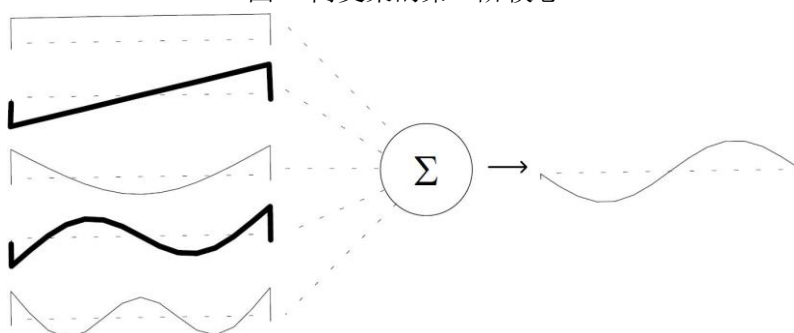


图 3 简支梁的第 2 阶模态

考虑修改后的悬臂梁的模态，发现原始系统未修改的前五阶模态对悬臂梁的模态都有很大的贡献。事实上，需要更多的模态才能改善悬臂梁模态的精度（注意：图 4 给出了悬臂梁的第 2 阶模态）。

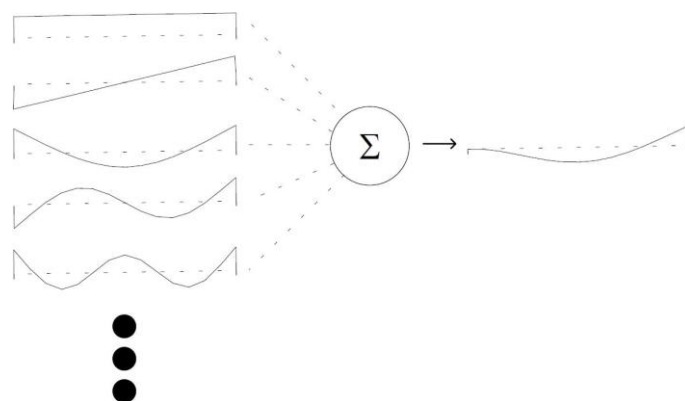


图4 悬臂梁的第2阶模态

简支梁的模态可以很容易地由自由梁的前五阶模态的线性组合得到，而悬臂梁却不能！因此事实是，不能得到所有模态（模态截断）不一定总会是个问题，真正的问题在于最终修改后的模态必须能够由原始修改前的模态计算得到。

另一个重要的注意事项是自由梁的刚体模态（RBM）对于准确预测修改后的模态具有非常重要的作用。如果刚体模态不可用，那么预测的模态是错误的。对于开发实验模态数据库而言，刚体模态是个相当重要的考虑事项，因为常常刚体模态不要求作为测试的一部分。然而，可以明显看出刚体模态对于结构动力学修改成功非常重要，在本例的简支梁修改中就可以看出这一点。

总之，使用 **SDM** 获得准确的修改后的模型的原则是，最终修改后的模态必须能够由修改前的模态的线性组合得到。如果能做到这一点，那么可以得到准确的结果；如果不能，那么由于模态截断将会产生误差。

不涉及所有详细的方程，使用一些简单的图例说明 **SDM** 怎样使用修改前的系统模态得到修改后的系统模态估计。我希望这些能帮助你理解 **SDM** 怎样受模态截断的影响。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



为什么质量载荷和数据一致性对模态参数估计很重要?  
让我来解释。

这是模态参数估计过程中另一个经常使人们感到迷惑的问题。经常，曲线拟合的结果让人感到迷糊或者似乎结果被扭曲时，通常会被指责为受噪声或者非线性影响。当人们不明白或者不能轻易地解释某些问题时，通常他们会发出这样盲目的指责。为此，让我们着手说明为什么数据一致性很重要和质量载荷将有怎样的影响。

首先回忆一下用于数据拟合的模型是由线性，对称的方程组组成，方程用全局变量定义系统极点（频率和阻尼），并且假设互易性是内在成立的。现在只要数据满足那个模型，那么一切都正常。但是测试过程和数据采集对这个却有影响。

考虑对一块平板进行测试，用两个激振器激励结构，用 8 通道数据采集系统进行多输入-多输入（MIMO）测试。为了获得满足要求的 FRF，使用精湛的测试技术确保得到最佳的测试效果。6 个加速度计安装在平板上，如图 1 所示（实心点为第一次测量，空心点为第二次测量，在结构上移动加速度计，激振器保持不动）。

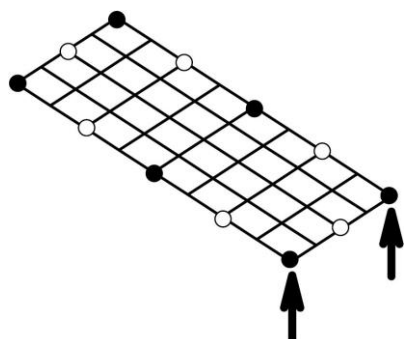


图 1 分两组进行 MIMO 测试

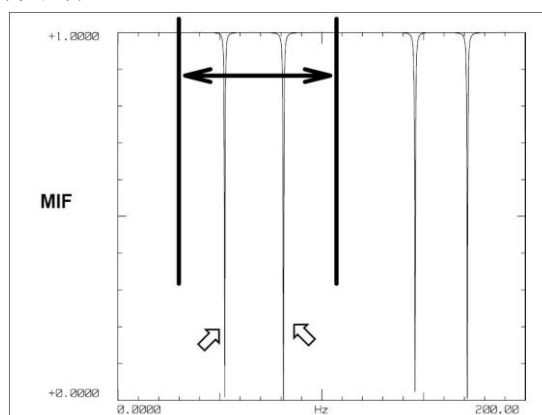


图 2 第一组数据的 MIF

图 2 为第一次测量的模态指示函数 MIF，图 3 为第一次测量的稳态图。假设只提取前两阶模态的极点（出于解释目的）。稳态图显示这两个极点非常清晰。注意，随着模型阶数（这个阶数是指参与曲线拟合的阶数，译者注）的增加，系统极点愈易于确定（叠加在 SUM 函数之上）。一旦提取到极点，那么得到的留数或模态振型提供的模态参数与这 6 个测量位置相关，典型的曲线拟合如图 4 所示。

然而，第一组数据仅由 6 个测点数据组成，为了更准确地定义模态振型，需要更多数目的测点。对于这些增加的测点，加速度计需要重新布署到图 1 所示的空心点位置上，然后采集第二组 MIMO 数据。仅使用第二组测量数据再次提取极点，得到稳态图。再次清晰地确定了系统极点和与这 6 个新测点位置相关的模态振型（此次结果在这儿没有给出，但它与第一组相似）。但是这两组数据是各自独立估计极点和留数的。

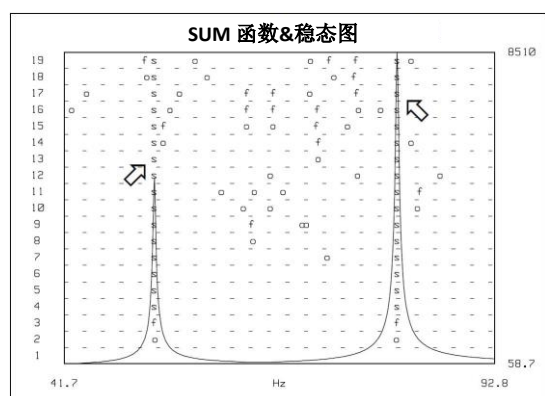


图3 第一组数据的稳态图

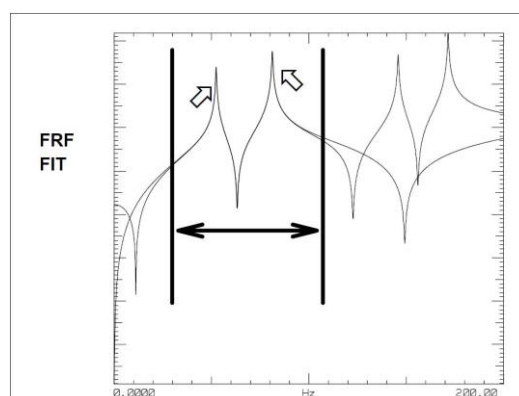


图4 用第一组数据进行曲线拟合

现在考虑将两组数据放在一起估计系统的模态参数。重新计算得到模态指示函数和稳态图。现在，在稳态图中有4个明显的共振峰位于相同的带宽内，而在图3中以前只看到两个共振峰，如图5所示。极点估计的带宽与早期相同（图6），但是这次估计表明这个区间有四阶模态，而不是早期的两阶！这可能吗？平板并没有改变，不是吗？

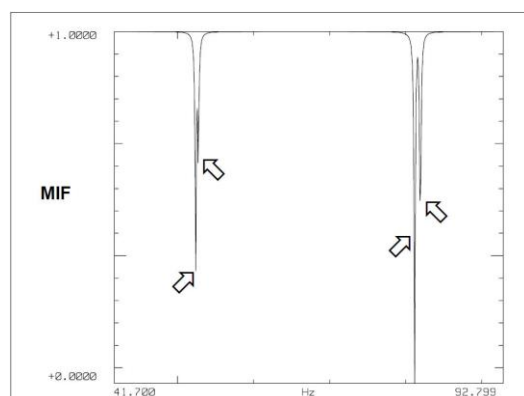


图5 两组数据组合后的 MIF

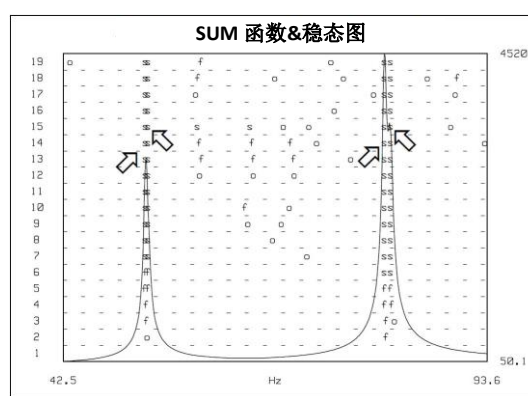


图6 两组数据组合后的稳态图

的确，平板没有改变，**但是测试设置改变了！**移动加速度计对结构有质量载荷的影响，引起了结构模态轻微移动。因此，当同时处理这些两组数据时，一些 FRF 指明了极点在某个频率处，而其他一些 FRF 指明极点在另一个频率处。

哪一个正确呢？可能两个都不正确。那是因为测量设置对测试出来的系统模态有影响。问题在于用哪一个极点进行模态参数估计才正确。对于所有的 FRF，你实在无法确定一组整体的系统极点，因为所有的 FRF 都不是“整体的”（也就是说两组 FRF 不是同时测量的，译者注）。实际上，在这种情况下，提取参数的正确方法是在测试过程中，在结构上安装所有使用的传感器（或者添加质量哑元），以消除质量载荷的影响，采集到一组“一致的”数据。这将提供更“一致的”数据，这些数据更符合数据拟合模型的要求。当然，必须重点指出的是，我们已经改变了测试结构，因为在结构上添加了所有有质量的传感器。但是至少所有的测量数据都将是一致的，不会因为质量载荷的影响致使模态参数估计失真。

当然，现实世界中的结构有各种各样的测量问题，与噪声、非线性、时变性等等相关。模态参数估计是一个相当复杂的过程，不要让一些简单的事项，如质量载荷扭曲你的数据，因而进一步复杂化参数估计过程。我希望这些回答有助于你明白为什么质量载荷和数据一致性如此重要。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



一直听说 SVD，你能为我简单地解释一下吗？

没问题！

我对你很快就问到这个问题一点也不感到吃惊。SVD，奇异值分解，可能是线性代数中最重要的方法之一，今天我们还在用它解决许多结构动力学问题。首先我们描述一下 SVD 的数学表达式和它的一些变量，然后描述实验模态分析通常在哪些地方需要用到它。当然，我仅试图解释 SVD 的应用，并不是要给出一个详细的数学推导过程。

首先，我们必须知道到我们需要用矩阵进行相关处理（我知道当我说用矩阵处理时，你会浑身发抖，但是我之前已说过“矩阵是你的朋友！”）。因此，假设我们有一个  $n \times n$  的方阵  $[A]$ ，SVD 的基本方程为

$$[A] = [U][S][V]^T$$

这个公式看起来相当简单，让我们展开其中一些项，以表明 SVD 强大的功能

$$[A] = [\{u_1\} \quad \{u_2\} \quad \{u_3\} \quad \dots] \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & s_3 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} [\{v_1\}^T \quad \{v_2\}^T \quad \{v_3\}^T \quad \dots]$$

上式的展开形式为

$$[A] = \{u_1\} s_1 \{v_1\}^T + \{u_2\} s_2 \{v_2\}^T + \{u_3\} s_3 \{v_3\}^T + \dots$$

这让人难以置信，因为这意味着矩阵  $A$  是由一组向量和描述这个矩阵的奇异值所组成。

我们也可以说其他矩阵组成了矩阵  $A$  的分块矩阵，这些组成分块矩阵的矩阵可以非常简单地用一个向量和其相应的特征值来描述。所以 SVD 确实具有确定组成矩阵“主分量”的能力，这也暗示着可以确定矩阵的秩。因此，让我们列举几个简单的实数矩阵说明其含义。

考虑一个带特征值的简单向量，说明基本的 SVD 方程。定义一个带奇异值的向量为

$$u_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}; \quad s_1 = 1$$

因此，矩阵  $A$  可以通过简单的矩阵乘法 ( $[A]_1 = \{u\}[s]\{u\}^T$ ) 得到，其形式为

$$[\mathbf{A}]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

该个矩阵相当简洁，因为我用一个向量形成了一个矩阵。矩阵是大小为  $3 \times 3$  的矩阵，但是能告诉我该矩阵的秩是多少吗？如果考察不同的行，那么可以迅速看出第二行和第三行与第一行线性相关。这表明虽然这个矩阵是  $3 \times 3$  的矩阵，但是只有一行是线性无关的，用于组成该矩阵（当然，这是对的，因为我只用了一个向量生成该矩阵）。那么我们就可以说这个矩阵的秩是 1，因为组成矩阵的各行，只有一行是线性无关的。

现在考虑另一个带特征值的简单向量

$$\mathbf{u}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{s}_2 = 1$$

因此，矩阵  $\mathbf{A}$  可以通过矩阵乘法得到，其形式为

$$[\mathbf{A}]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

我可以再次得出与前一个讨论的矩阵相同的结论。这个矩阵的秩也是 1，因为组成矩阵的各行，只有一行是线性无关的。

现在考虑一个一般性的矩阵

$$[\mathbf{A}]_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

这个矩阵是个  $3 \times 3$  的矩阵，但是不能直观地看出其秩是多少。确定秩的最简单方法是对矩阵进行 SVD。相应的分解式为

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{1 \ 2 \ 3\} \\ \{1 \ 1 \ -1\} \\ \{0 \ 0 \ 0\} \end{bmatrix}$$

所以 SVD 的好处就是我可以利用矩阵  $\mathbf{A}$  的线性无关部分来表示矩阵  $\mathbf{A}$ 。其和的形式为

$$[\mathbf{A}] = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} 1 \{1 \ 2 \ 3\} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} 1 \{1 \ 1 \ -1\} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} 0 \{0 \ 0 \ 0\}$$

我想这有助于解释 SVD 的基本原理。但是现在我需要讨论它的一些应用，通常在什么地方应用 SVD（SVD 应用非常广泛，但是只有少数特定的几项与实验模态测试有关）。

SVD 的应用之一是用于实验模态测试采集 MIMO 数据。虽然数据采集系统为所有线性无关的 MIMO 激振器产生激励函数，但是现实中每个激振器的激励力可能不完全是线性无关的，因为激振器与结构之间存在相互作用。因此需要检查力谱矩阵的线性无关性。在采集 MIMO 数据过程中，用激振器的输入功率谱  $\mathbf{G}_{xx}$  矩阵进行主分量分析。这种技术使用 SVD 分解  $\mathbf{G}_{xx}$  矩阵，然后为每一个输入在频率轴上绘出奇异性图。如果所有的激振器都是线性



无关的，那么每个线性无关的输入在所有频率成分处的奇异值都很显著，如图 1 所示。

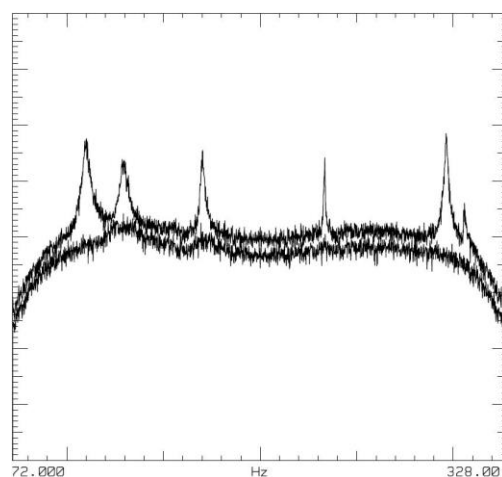


图 1 2 个 MIMO 激振器的 SVD

另一个应用用于模态参数估计。通过 SVD 分解一些不同参考点的 FRF 矩阵，以便确定系统的根（或者模态）。SVD 分解是复模态指示函数（CMIF）模态参数估计方法的基础。通过 CMIF 的 SVD 分解得到的曲线图中的奇异值极值将指明系统模态位于何处。图 2 为一个具有重根的系统的 SVD 分解后的典型 CMIF 曲线图。

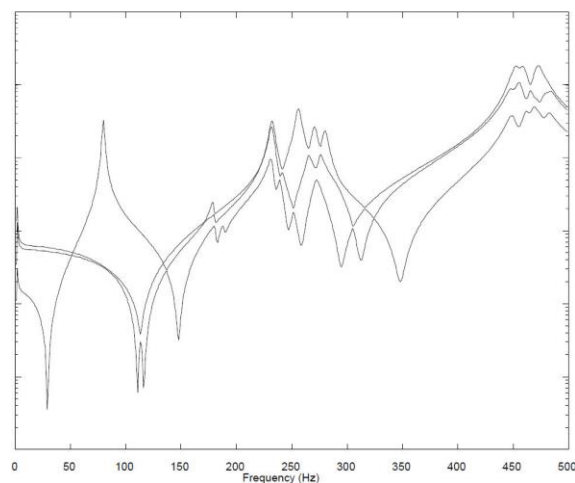


图 2

虽然 SVD 还有许多其他的应用，但我希望这几个实例有助于帮助你更好地理解这种技术。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



使用实际工作载荷作为模态测试激励力，并且该力为随机信号，这样有意义吗？

回答这个问题不太容易，因为这个问题涉及许多方面，为了全面理解这个答案，我们需要进行讨论。

使用随机工作激励看起来似乎是个不错的想法，但是本质是通过该激励方式提取得到的模态参数不可能完全与采用传统激励技术得到的模态参数一样好。让我们讨论这个问题，看看工作激励存在哪些缺点。为了理解所有的涵义，会涉及到模态其他方面的一些问题与答案（SEM ET V23 No1, V23 No4, V23 No6），这些将有助于使你更明白这个问题。

让我们回想一下，实验模态测试通常是提取结构潜在的模态参数，即频率、阻尼和模态振型。为了提取到这些参数，需要精确地测量频响函数。通常，我们不遗余力地使用专门的激励技术对结构进行激励，以减小，并且最终消除泄漏和其他一些可能产生的信号处理误差。记住，任何信号处理误差都将扭曲测量得到的频响函数，降低模态参数的精度。

一般来说，随机信号不能提供精确的频响函数测量，不是最合适的激励方式。随机激励技术会引起频谱泄漏是众所周知的。相比其他无泄漏的激励技术（比如猝发随机、正弦快速扫频、数字步进正弦），随机激励即使加窗，仍会使频响函数失真。

比较由随机激励和猝发随机激励得到的频响函数，如图 1 所示。从图中可以清晰地看出，猝发随机激励为无泄漏测量，其结果远远优于随机激励测量（相干也是如此，但图中没有给出）。

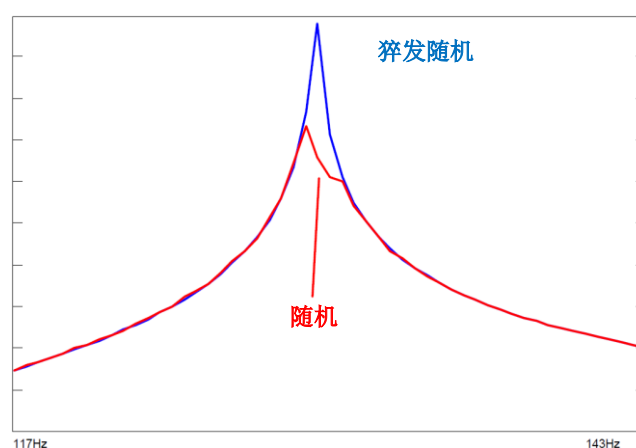


图 1 猝发随机和随机激励的 FRF

更进一步，由随机激励提取到的模态参数也存在失真，在许多情况下，随机激励的 FRF 似乎会出现两个峰，如图 1 所示。这是随机激励对频响函数典型的影响。泄漏是个严重问题，因此，必须加窗以便将泄漏减小到最小程度。模态测试开发专门的函数的最终目的是为了获得高精度的频响函数，因此能提供无泄漏的测量，不需要使用任何窗函数。

因此，用工作状态下的随机激励进行模态测试，将会得到什么？如果使用实际工作状态下的力去激励结构，那么结构响应将与实际工作状态下的响应相似。这个响应将是结构在工

作状态下的实际变形的精确反映。这样测量得到的响应更适合于工作变形分析，而不是实验模态分析。

图 2 为一任意输入激励引起结构响应的示意图。图中的有关方面将为这个问题给出更深刻的洞悉。力函数为宽频带，但是可以明显地看出力谱并不平坦，因为激励所有模态的激励力大小是不同的。

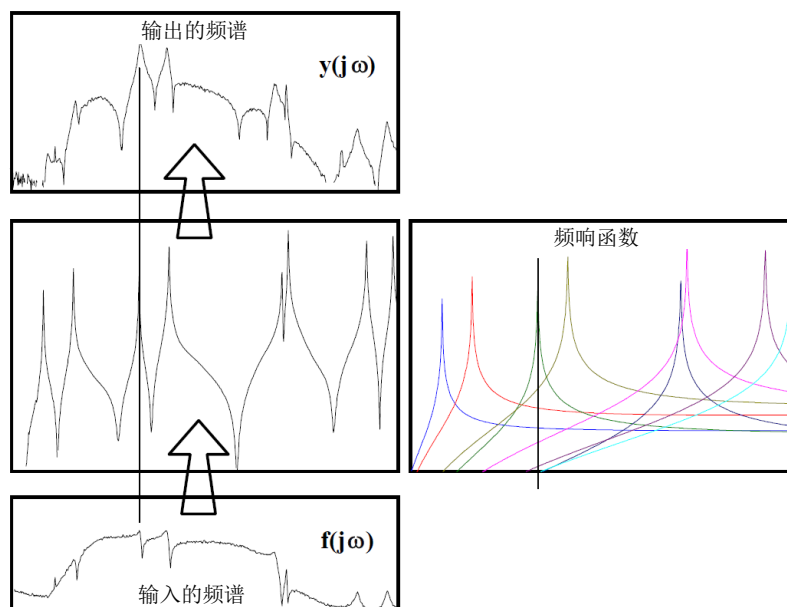


图 2 典型的随机输入-输出情况

首先，最重要的是频响函数刚好是个带通滤波器，根据频率可以放大或削弱输入激励力。如果因数字信号处理过程（比如数字化、量化、泄漏、窗函数、FRF 方法等等）造成频率响应估计失真，将会发生什么状况？当然，这对计算响应有影响。模态测试的目的为了提取精确的系统动态特性。

第二，频率范围内的力谱的激励力大小对系统响应有直接影响。图 3 非常清楚地表明响应在频带上变化剧烈。因为总响应频谱确定模数转换器 ADC 的最大档位设置，那么测量函数的精度就会有较大的变化。事实上，与模数转换过程相关的量化误差会对响应较小的谱成分的精度造成更大的影响。如考虑图中的 1 阶和 3 阶响应，这种影响明显尤为突出。注意到 1 阶模态的响应非常小，是因为输入激励极其小。1 阶响应过于小，可能会遭受噪声的影响。

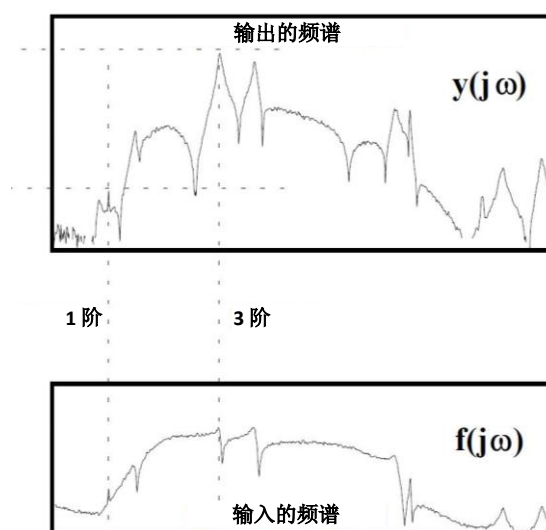


图 3 信号大小不同

第三，如果使用随机激励，必须加汉宁窗，否则测量得到的信号中将遭遇严重的泄漏影响。无论如何，测量得到的频响函数都会遭受窗函数和泄漏的影响。这样测量得到的频响函数质量不高，提取到的模态参数也将遭受这些信号处理误差的影响。

第四，测量得到的频响函数将存在误差，该误差与激励信号在一些频率区域激励能量太弱有关。随机激励信号的随机特点使得频响函数存在泄漏和受窗函数的影响。频响函数与泄漏相关的误差在相干中也清晰可见，特别是在共振峰处。因为使用低质量的频响函数将使得模态参数估计也出现误差。

所以由测量函数开发模态模型时，最佳的激励技术将提供最合适的结构模态参数估计。因此，没有必要使用工作状态下的随机激励作为模态测试的激励方式。一旦开发了一个模态模型，那么结构的实际响应也随之确定，如果必要的话，可以使用如图 2 所示的频响函数加以说明。但是为了得到准确的响应，由精确的频响函数开发得到的精确的模态模型是极其重要的。

现今，使用工作条件下的激励进行工作测试有很多巨大的优点。然而，使用工作激励不是为开发模态模型而进行的频响函数测量的最佳方式。现在我希望你已明白与工作激励进行实验模态测试相关的问题。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



锤击测试使用指数窗会引起什么问题吗？

让我们来讨论它。

如果指数窗使用不合理，将会引起一些问题。如果需要使用大指数窗以便最小化泄漏所造成的影响，那么你将冒着丢失密集模态的风险。这儿有几个实例与指数窗的使用有关，明白如果不反复尝试施加不同大小的指数窗，将会产生什么样的结果。

首先，我必须明确地指出在许多锤击法测试中，指数窗都是必要的。然而，在加任何窗之前，明智的做法是尝试不同的方法去减小泄漏的影响。在使用指数窗之前，总是需要考虑增加谱线数或者带宽减半，二者本质上都是增加总的采样时间。这种考虑很有帮助，因为这使得系统响应在采样周期结束之前自然地衰减到零。如果这一点能够实现，那么没必要使用指数窗。

然而，如果响应在采样周期结束前仍没有衰减到零，那么可能指数窗是必要的。在应用指数窗之前，应先考虑前面提及的两个方法作为最小化泄漏影响的可能方法。在首先没有观察时域响应的情况下，就任意地施加指数窗作为测量过程的第一步，不推荐这样做。让我们通过一个简单的实例说明这一点。

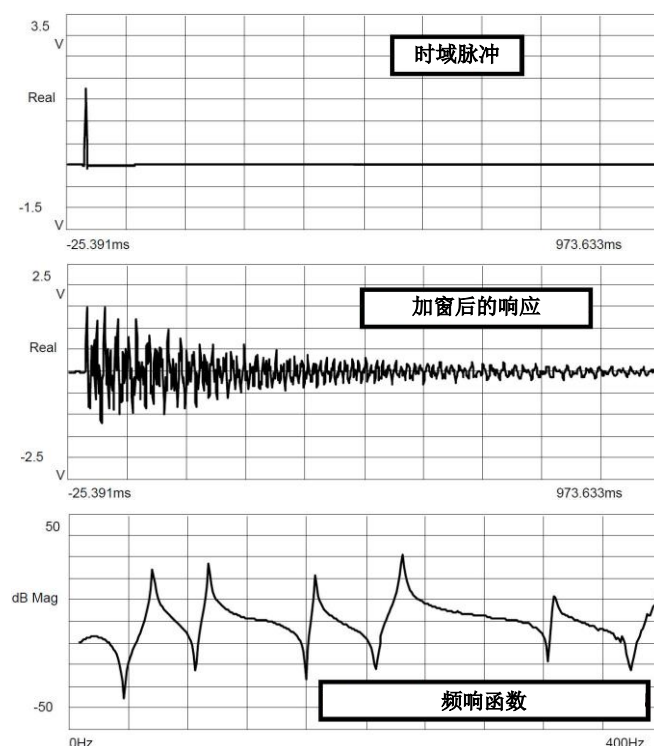


图 1 加小指数窗的 FRF

对一个非常简单，小阻尼的结构进行锤击测试。选择的信号处理参数是 400Hz 的带宽和 1 秒的时域采样长度。因为结构的响应在采样周期结束前没有衰减到零，那么需要施加一

个指数窗，加窗后的响应在采样周期结束前将衰减到相当小的值，这样可以最小化泄漏所带来的影响。锤击激励、加指数窗的响应和 FRF，如图 1 所示。表面上看，此次测量看起来是可接受的。【注意力谱（图中没有给出）在整个频带内相当平坦，因而可认为充分地激励了结构。同时注意到相干（图中也没给出）认为也是可接受的。】

从各方面来看，这次测量似乎完全可接受。但是我们需要更深层次地考察此次测量。首先，考虑相同的测量，但是对响应信号施加了一个衰减更快的指数窗。图 2 中给出了相同的数据，但是指数窗的衰减指数较大。这次锤击测量产生的 FRF 中的阻尼比图 1 所示的 FRF 中的阻尼明显要大得多。FRF 的峰值显示了这个影响，注意到因为使用了大阻尼指数窗，FRF 的峰比较宽胖。

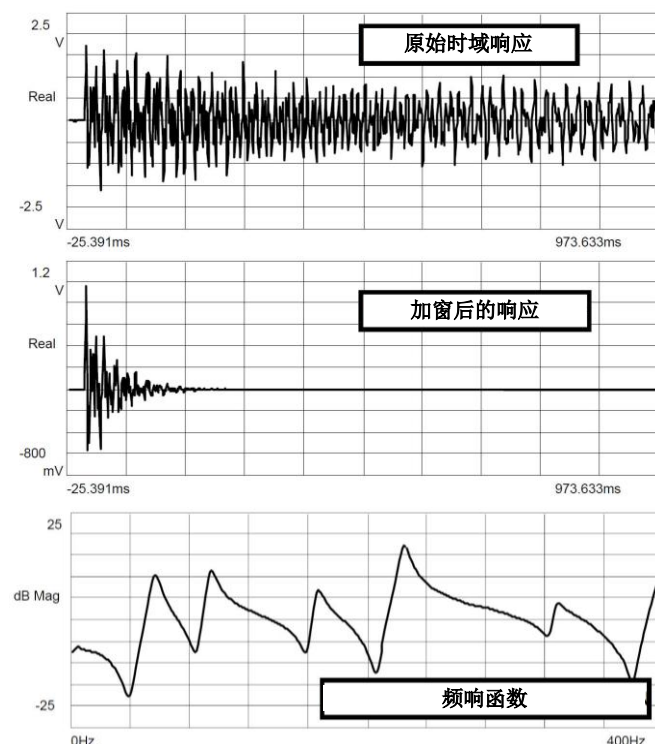


图 2 加大指数窗的 FRF

现在更深入一点去考察此次测量，并尝试改变一些信号处理参数。为了减少指数窗的使用，要么缩短带宽，要么增加谱线条数。两个方法都将必然导致总的采样时间的增加。如果增加总的采样时间，那么对采集到的数据加大指数窗的需求将会减少。

图 3 是将谱线条数增加一倍后的结果。时间样本长度由 1 秒增加到 2 秒。虽然仍然需要施加指数窗以最小化泄漏的影响，但是此次加窗对测量数据所带来的总的阻尼影响远小于图 1 和图 2 加窗所带来的影响。

最重要的是图 3 中在 FRF 的第一个峰值处似乎只有一阶模态，但实际上原来是两阶非常靠近的密集模态。图 1 和图 2 中使用的指数窗导致 FRF 第一个峰值处只有一阶模态。这两个指数窗的使用使得 FRF 两阶明显不同的模态只显示了一个峰值。

虽然加指数窗以最小化泄漏是必须的，但是图 1 和图 2 中加窗函数扭曲了真实的 FRF，致使在 FRF 这个频率处很难观测到两个峰值。指数窗的使用，虽然是数字信号处理必须考虑的事项，但是当估计小阻尼结构和密集模态时，如本例中的情况，将会引起一些严重的问题。



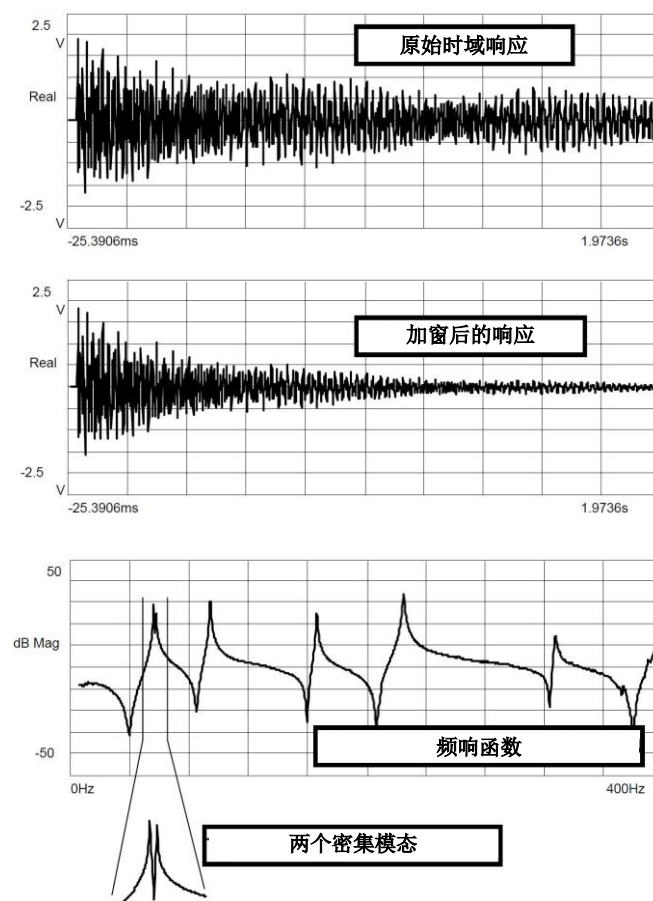


图 3 增加时间/频率分辨率后的 FRF

现在我希望你能明白这个例子中指数窗的一些影响。虽然可能加指数窗对最小化泄漏是必须的，但是窗的使用可能会隐藏或者扭曲 FRF 中的模态。故锤击法测试时，当需要使用指数窗时，需要极其小心。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



使用多参考点有何好处？我认为只需要一个参考点。

让我们探讨一下.....

这个问题非常好，在由测试数据估计模态参数方面时，经常会出现这个问题。模态分析理论清楚地表明为了确定系统所有模态，只需要一个参考点，至少理论上是成立的。虽然理论的确成立，但从实际角度考虑，许多测试情况强烈需要使用多参考点。在理解这一点之前，让我们考虑一些基本概念，这将有助于说明我们可能遭遇到的一些问题。

让我们以一个简单的框架结构为例着手本次讨论，该框架结构的模态振型具有非常强的方向性。在以前一些章节的讨论中，我们用过一个结构。结构如图 1 所示，并给出了前六阶模态振型。

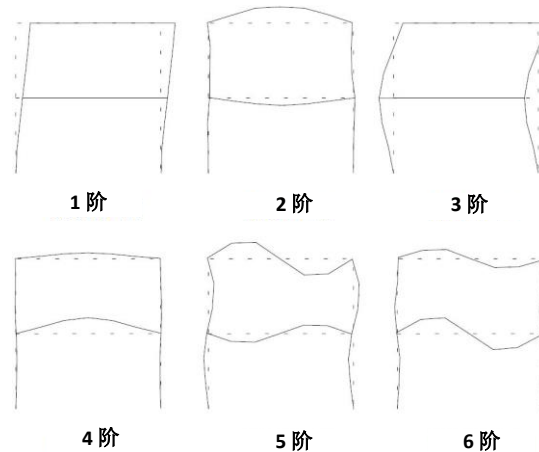


图 1

如果我们只考虑在垂直方向布置一个参考点（如图 2 所示），关心的频率范围覆盖结构前六阶模态，注意到在测量得到的频响函数中只有两个峰可见。而我们知道在这个频率范围内有六阶模态。如果我们考虑在水平方向布置一个参考点，也只有四个共振峰可见。通过仔细检查两次测量，发现两次测量的前两阶频率完全不相同。

让我们回想一下频响函数方程

$$\mathbf{h}_{ij}(\mathbf{j}\omega) = \sum_{k=1}^m \left( \frac{\mathbf{a}_{ijk}}{(\mathbf{j}\omega - \mathbf{p}_k)} + \frac{\mathbf{a}_{ijk}^*}{(\mathbf{j}\omega - \mathbf{p}_k^*)} \right)$$

该方程主要由系统每一阶模态的留数（分子）和极点（分母）来描述。我们知道这个频响函数可以用任何一个感兴趣的输入-输出组合来表示。这个方程感兴趣的部分是留数和极点，虽然留数的改变依赖于获得的输入-输出组合，但是极点保持不变。这暗示着系统极点是整体特性，它们独立于特定的输入-输出位置。然而，留数却依赖于这些特定的输入-输出位置，随输入-输出位置的变化而变化。

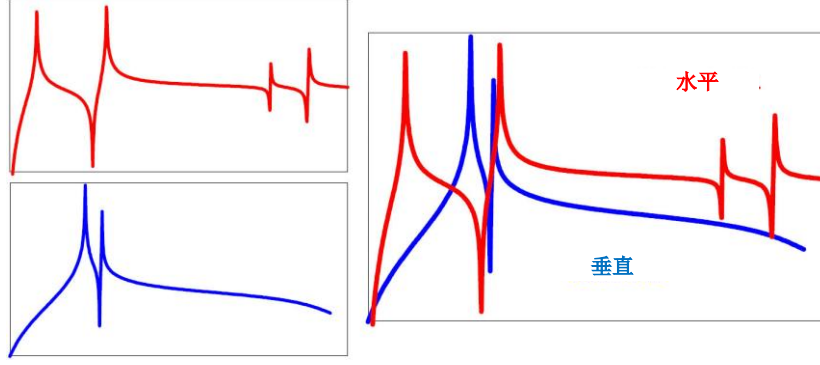


图 2

进行模态测试时，获得的所有测量都是相对于特定的参考点而言的。进行激振器测试时，参考点位置通常是固定的激励位置；进行锤击法测试时，参考点的位置通常是固定的加速度计的测量位置。因此，获得的 FRF 将包含留数信息，也是相对于一个特定的参考点而言的，形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \cdots \end{bmatrix}_{\mathbf{k}}$$

在这种情况下，参考点是“1”，因为所有的留数都是相对这个 DOF 而言的。留数是  $\mathbf{a}_{11}$ ， $\mathbf{a}_{12}$ ， $\mathbf{a}_{13}$  等等（注意下标“ $\mathbf{k}$ ”是表示系统某一阶特定的模态）。

我们知道留数直接与模态振型（和比例因子）相关

$$\mathbf{a}_{ijk} = \mathbf{q}_k \mathbf{u}_{ik} \mathbf{u}_{jk}$$

这表明留数实际上直接与系统的模态振型相关

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{11k} \\ \mathbf{a}_{21k} \\ \mathbf{a}_{31k} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{q}_k \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{1k} \mathbf{u}_{1k} \\ \mathbf{u}_{2k} \mathbf{u}_{1k} \\ \mathbf{u}_{3k} \mathbf{u}_{1k} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{q}_k \mathbf{u}_{1k} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{1k} \\ \mathbf{u}_{2k} \\ \mathbf{u}_{3k} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

注意 1 点的参考自由度（DOF）可以提为公因子，因为它对所有的测量都是共用的。提出公因子之后，方程就清楚地表明参考点的自由度起到了极大的，与留数大小相关的加权作用，这与频响应函数的大小直接相关。对于一阶特定的模态，如果参考点处结构模态振型响应非常小，那么这阶模态的频响应函数的数值也非常小。另一方面，如果参考点位于模态振型响应非常大的位置，那么频响应函数的数值也非常大。

当然，我们也能明白，如果在参考自由度位置某一阶模态振型值非常大，而另一阶模态振型值非常小，那么频响应函数的幅值也将有相同的特点（参考点模态振型值大的，FRF 幅值也大，振型值小的，FRF 幅值也小）。进行任何模态测试，这个问题都常见。我们总是设法将加速度计置于这样一个位置：使用相同的测试努力，在感兴趣的频率范围内，由该位置能观测到结构所有的模态。然而，做到这一点经常极其困难，许多情况几乎不可能做到。

然而，我们可以通过在频响应函数矩阵中使用多个参考点去改善这种状况。如果考虑频响矩阵中某些项，那么你会发现一些有趣的信息。下式中给出留数矩阵和相对于参考点的一些展开项

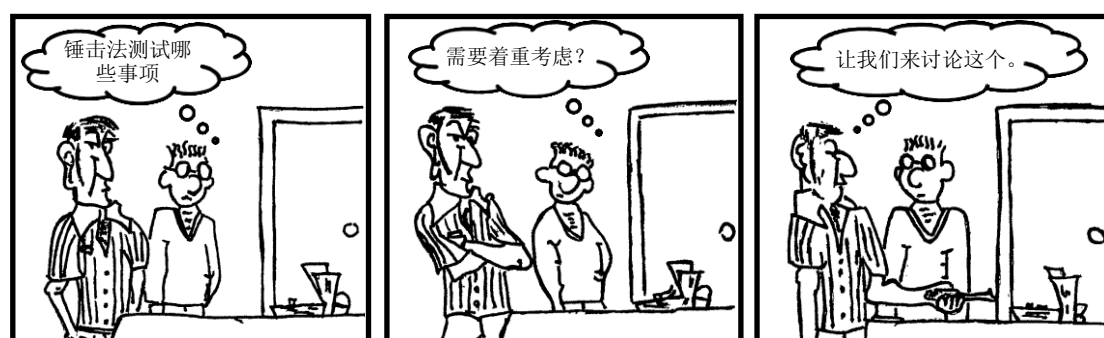
$$[\mathbf{A}(\mathbf{s})]_{\mathbf{k}} = \mathbf{q}_k \{\mathbf{u}_k\} \{\mathbf{u}_k\}^T$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11k} & \mathbf{a}_{12k} & \mathbf{a}_{13k} & \cdots \\ \mathbf{a}_{21k} & \mathbf{a}_{22k} & \mathbf{a}_{23k} & \cdots \\ \mathbf{a}_{31k} & \mathbf{a}_{32k} & \mathbf{a}_{33k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \mathbf{q}_k \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{1k} \mathbf{u}_{1k} & \mathbf{u}_{1k} \mathbf{u}_{2k} & \mathbf{u}_{1k} \mathbf{u}_{3k} & \cdots \\ \mathbf{u}_{2k} \mathbf{u}_{1k} & \mathbf{u}_{2k} \mathbf{u}_{2k} & \mathbf{u}_{2k} \mathbf{u}_{3k} & \cdots \\ \mathbf{u}_{3k} \mathbf{u}_{1k} & \mathbf{u}_{3k} \mathbf{u}_{2k} & \mathbf{u}_{3k} \mathbf{u}_{3k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

注意矩阵中有冗余（存在在多行或多列）。每一列包含的信息都与系统第  $k$  阶模态振型乘以参考自由度相关（同时注意到，根据对称性，每行也包含相同的信息）。这就是为什么许多模态参数估计算法都要使用多参考点数据的原因所在。每一个参考点都包含相同的基本信息：对于某一阶特定的模态，只能通过参考自由度缩放模态振型。因而，可以提取多余的信息，并在曲线拟合中使用。

更重要的是，如果某一个参考点位置没能有效地激起某一阶特定的模态（比如，参考点紧临那阶模态的节点），那么其他位置的参考点就可能是更合适的参考点，能辨别出该阶模态。因此，使用多参考点能减轻仅使用一个参考点要完全确定系统所有模态的需求。模态参数估计过程使用加权项，称为模态参与因子，是为了利用所有参考数据提取到有效的模态参数。因此，使用多参考点数据对确定模态参数有巨大的帮助。使用多参考点，考虑一些参考点的选择，这时每一个参考点可能确定系统的某几阶模态，但不能完全确定系统所有模态。然而，使用多参考点，通过参考点的组合就能达到充分描述系统所有模态的目的。这样一来，多参考点充分确定系统所有模态的可能性最大。而仅使用一个参考点，就不可能完全做到这一点，即使理论上是可能的。

我希望这些解释有助于明白为什么使用多参考点非常有用，即使它们在理论上不是必须的。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



锤击法测试哪些事项需要着重考虑?

让我们来讨论这个。

这是个相当不错的问题。最重要的考虑事项可以分成两大类，一类与锤击有关，一类与响应有关。激励关心的事项比较多，但是在这儿仅讨论以下三项：锤头、触发延迟和二次连击。然而，其他一些事项，比如 ADC 过载/欠载、数字化仪差的利用率和测试非线性结构的困难程度，以及他关心事项在这都不作讨论。与响应有关的事项是信号衰减和使用窗函数，以最小化泄漏。先讨论激励事项，然后再是响应事项。

首先，锤头对激励频谱负极大的责任。通常，锤头越硬，激起的频带越宽。使用的锤头硬度范围通常从最软的橡胶头到最硬的金属头，以及一些中等硬度的锤头，比如软塑料头、硬塑料头、铝头等。每种设计好的锤头，在锤击过程中都有一个确定的弹性变形量。锤头总的作用时间直接与激起的频率范围有关。通常，脉冲作用时间越短，激励的频带越宽（图 1 为一些典型锤头锤击的脉冲与相应的频谱）。

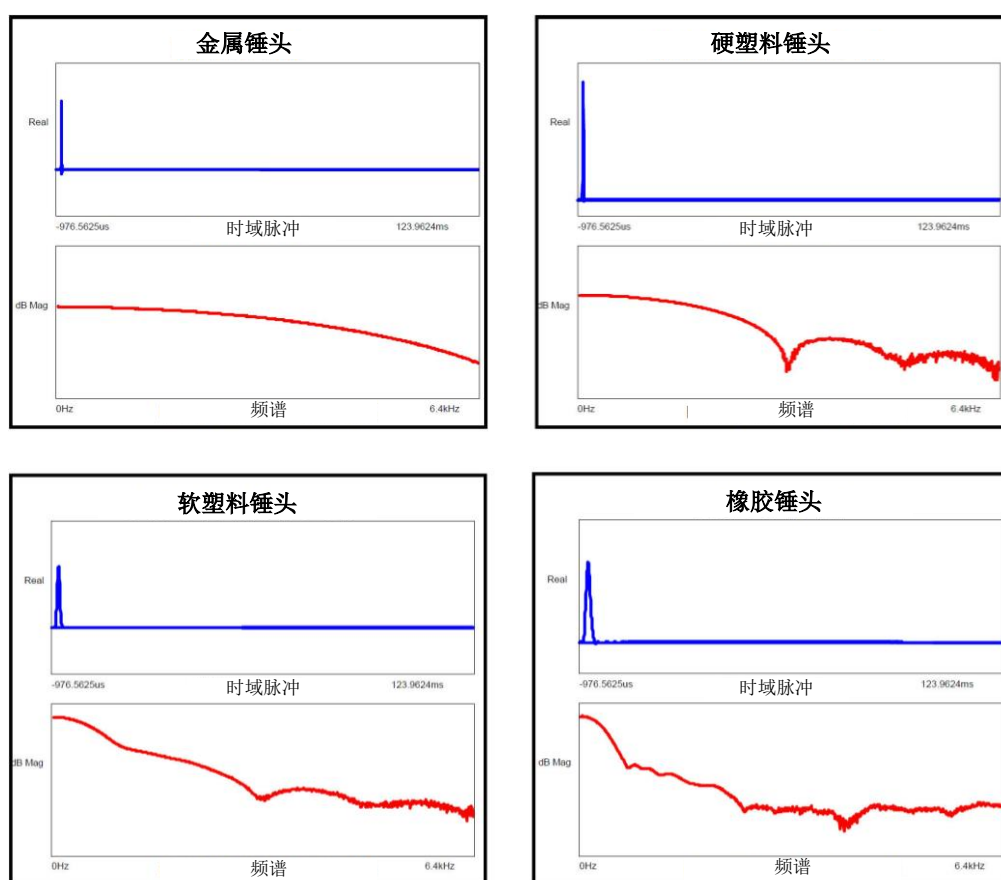


图 1

虽然通常的情况是这样的,但是经常结构的局部刚度对锤击总的作用时间起了重要的作用,因此结构局部刚度对作用到结构上的力谱有影响。当测试遍历整个结构,结构刚度变化明显时,你可能会注意到这一点。当锤击刚性区域时,观测到的输入频谱跟锤击柔性区域激起的频谱有很大的不同(锤头生产商提供的相应锤头频谱,是不包括任何结构局部刚度的影响)。因此,使用时必须小心。

另一个与锤击法测试相关的比较重要的注意事项是预触发延迟。因为测量的开始受脉冲主斜率控制,如果不使用特定的预触发滞后,那么将会丢失部分脉冲,造成相应的力谱失真。图 2 所示为频谱失真的影响。红色脉冲和相应的频谱明显不同于采用了正确使用预触发的蓝色脉冲和相应频率。这将引起力谱失真,从而影响 FRF 计算。

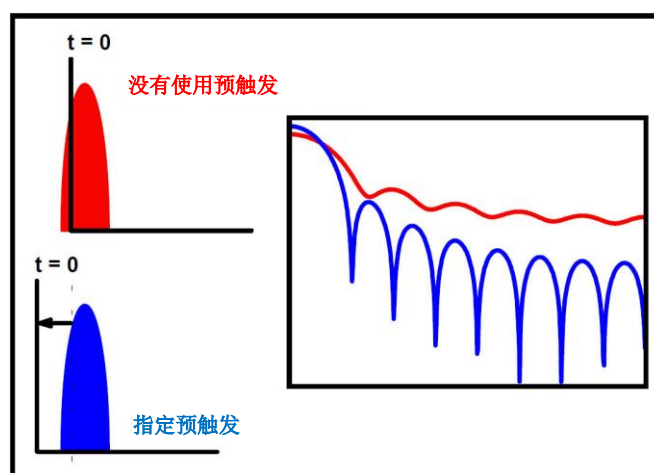


图 2

通常,预触发延迟为总采样时间的 1% 到 5% 便可完全消除这个影响。因为一些 FFT 分析仪为预触发采用正 (+) 延迟,而另外一些采用负 (-) 延迟,所以指定延迟时,必须事先不断试测。如果应用不正确,会产生完全错误的频谱。检查时域脉冲以确保整个脉冲在采样时间内能被完全捕获到。另外,一些分析仪使用总采样时间的百分比表示延迟,而另一些分析仪用绝对时间秒表示延迟。如果使用绝对时间,那么可能会引起问题,特别是在测试过程中改变带宽时,所以必须小心。

另一个恼人的锤击法测试问题是二次连击(双击)。二次连击通常会产生不一致、不平坦的力谱。图 3 给出了两种典型的二次连击情况。输入力频谱不希望出现“波纹”效应,特别是在力谱大幅度衰减时。连击会引起力谱的幅值衰减 30dB 或者更多,特别是在共振峰处,并且这是经常发生的。

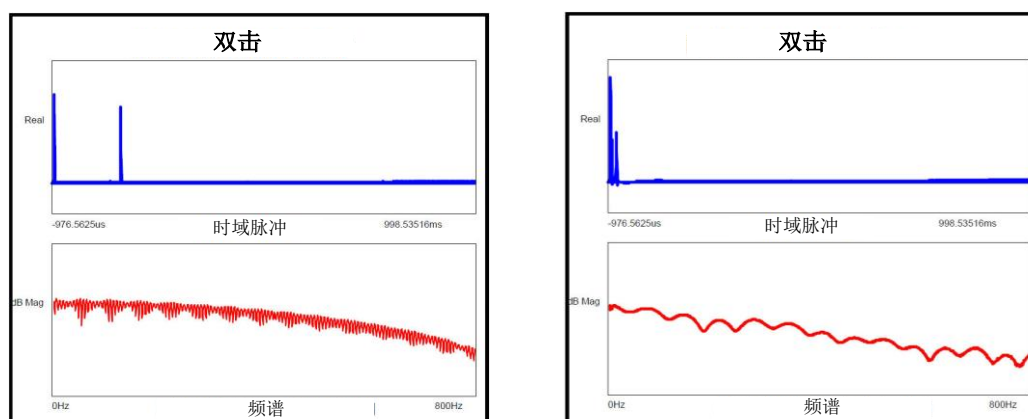


图 3



连击产生的原因通常有两种可能。许多连击是因新手或者经验不足的测试人员引起的。需要花费一些时间去练习挥舞锤子，模态锤击技术是一门专门技术，不同于钉钉子。但是，甚至对于一些有经验的测试人员来说，有时连击仍不可避免。经常，对于小阻尼结构，结构响应非常迅速，以致于力锤来不及从结构表面移开。这种情况下，连击是不可避免的。这样引起的问题是力谱经常在结构主要的共振峰处有显著的衰减。这将产生一些不想要的影响，因而必须避免。一个可能克服连击的技术是使用互易性，即锤击和响应位置互换，因而能消除连击影响。这种技术经常可以解决连击问题，但是很多时候质量载荷的影响又成了问题。

最后的主要关心事项与响应指数窗的使用有关。系统的响应在 FFT 采样时间末端可能没有衰减到零，在这种情况下，泄漏会出现，除非使用窗函数。最合适的窗函数是指数窗，但是应该在必须使用时才使用它。很多时候，信号在采样周期内自由地衰减到零了，那么窗函数就不是必须的。

经常，可以设置数采系统，使得信号在采样周期内自由地衰减到零。在使用窗函数之前，必须考虑两个信号处理方法。改变选择带宽对采集数据的总采样时间有直接影响，如果带宽减半，那么采样时间将增加一倍。另一个方法是增加总的采样时间，这样就改变了信号样本总量。两个信号处理方法使得能采集到更长的时域数据，因而在使用窗函数之前应该总是考虑这两个方法。然而，如果在采样时长末端，信号还是没有完全衰减到零，那么为了最小化泄漏的影响，窗函数仍然还是必要的。图 4 中蓝色表示的时域信号，要求加指数窗；而红色表示的时域信号，不要求加窗（或者至少大幅度减少了窗函数的使用）。

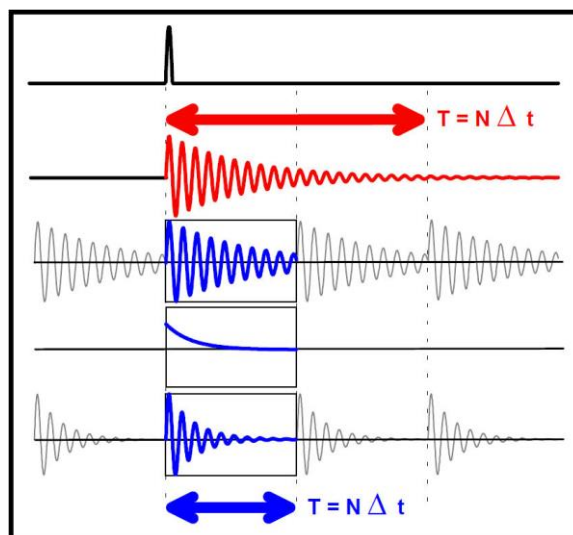


图 4

我希望这些能帮助你明白锤击法测试时一些需要着重考虑的事项。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



模态参数估计应该使用采集到的所有 FRF 吗？

让我们来讨论这个问题。

这是个相当不错的问题。倘若测量得到的都是高质量和一致性的数据，没有理由不使用所有采集到的数据。倘若测试时，使用动态范围足够的仪器，准确灵敏的传感器，并且从所有参考点位置和所有响应位置都充分激起了系统所有的模态，那么，所有的数据都能用于模态参数估计。

但是我上面说的是一句总结性的话，是必要条件。从你脸上的表情就可以看出，**所有的**测量数据都满足这个要求是**极其不可能的**。在过去的四分之一世纪里，我亲自操作的或者与我有关的任何模态测试，**从来都没有做到这一点**，不光我一个人这样，别人也是如此。我刚才描述的那种测量情况，只有可能出现在分析模型中，并且该分析模型具有无限宽的动态范围和极其高的频率分辨率。从现实角度考虑，这样的情况是不可能出现的。所以，让我们讨论现实中的测试情况和一些实际可行的方法，用于将测量中的缺点降低到最小程度。

作为测试常见问题的一个实例，我将使用多年前对一个航空结构进行的模态测试，这个结构的模态具有严重的方向性，并且有多阶局部模态。图 1 所示为这个结构和一些典型的 FRF。注意图中下边的 FRF 曲线只显示了少数几阶模态，而上面的 FRF 曲线显示了结构所有模态。事实上，这个问题不仅仅是一个航空结构的问题，而是我们模态测试中普遍存在的问题。而图示的 FRF 仅是这方面的一个典型案例，几乎对任何结构进行模态测试都会遇到这个问题。

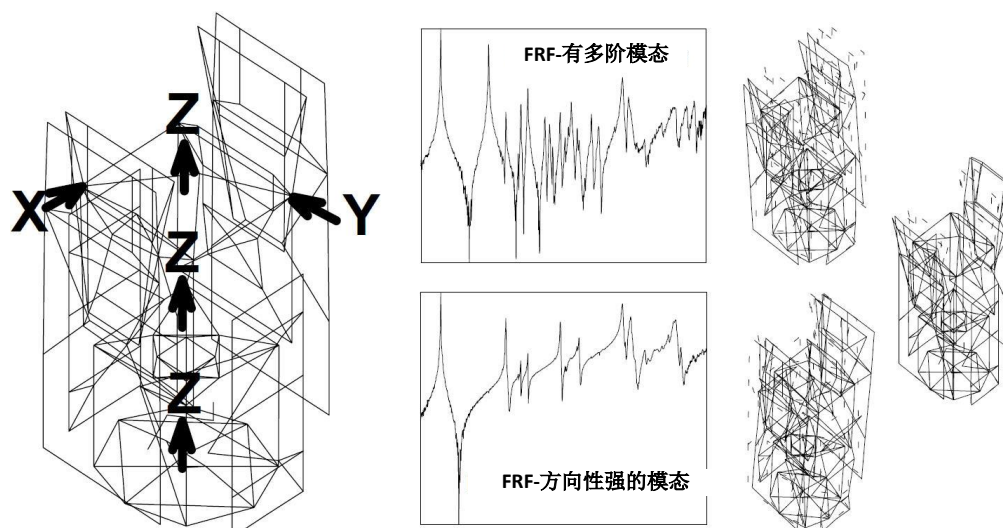


图 1 航空结构的 FRF 和一些模态振型

图示的结构具有一些低阶的弯曲和扭转模态，紧接着的是结构上的面板和外围设备的多阶弯曲、扭转、同步和异步等类型的局部模态。实际测试时用五个独立的激振器进行激励（三个垂直方向和两个水平方向）。

结构的第 1 阶模态为  $x$  方向的弯曲模态， $y$  方向几乎没有响应。显然， $x$  方向的激振器对激励  $x$  方向的模态有突出贡献，但是  $y$  方向的激振器却不能激起  $x$  方向的模态。因此，从  $y$  方向激振器得到的 FRF 明显较差，因为结构的第 1 阶模态没有  $y$  方向的响应参与。

另一方面，结构的第 2 阶模态为  $y$  方向的弯曲模态，几乎没有  $x$  方向的响应。这时刚好与前面讨论的情况相反。即  $y$  方向的激振器对激励  $y$  方向的模态有突出贡献，但是  $x$  方向的激振器却不能激起  $y$  方向的模态。但是这两个方向的激振器对激励结构扭转模态都有杰出贡献。这直接意味着每阶模态测量到的所有 FRF 不可能有相同的精度。

采用五个激振器进行多输入-多输出 (MIMO) 激励，所有的 FRF 都是同时采集的，但是显然所有的模态不可能由每个激振器均等地激起。这是多数测试中普遍存在的物理事实，通常不可能克服。因此，怎样才能有效、准确地处理所有的数据？

现今多数模态参数估计方法，通常分两个处理步骤。首先估计极点，然后计算留数或模态振型（要求先提取到整体极点）。记住这一点：进行系统极点估计时，不需要使用所有的 FRF。可以使用部分频响函数，也就是那些最能合理描述感兴趣的极点的频响函数来估计系统极点。一旦得到系统整体极点，那么留数或者模态振型就可以使用所有测量 DOF 的 FRF 提取到（没有必要使用所有参考点来估计留数，特别是如果某些参考点没能充分激起结构所有模态时）。选择特定的 FRF 用于估计系统极点的示意图，如图 2 所示。

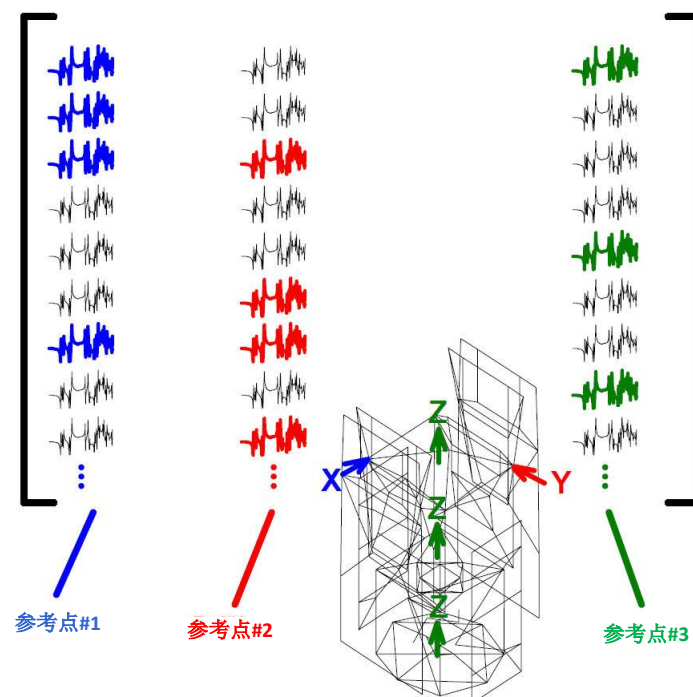


图 2 选择 FRF 的示意图

在这个例子中，仅用了由  $x$  方向激励位置产生的  $x$  方向响应的测量数据来估计  $x$  方向的第一阶弯曲模态。仅用了由  $y$  方向激励位置产生的  $y$  方向响应的测量数据来估计  $y$  方向的弯曲模态。但是同时使用了  $x$  和  $y$  方向激励与  $x$  和  $y$  方向响应的测量数据估计结构的扭转模态。注意没有使用  $z$  方向的激励和响应估计这些模态的极点。这是因为  $z$  方向激励很难有效地激起  $x$  或  $y$  方向的模态。虽然这些 ( $z$  方向) 参考点/激励点对激励结构的一些高阶模态是必须的，但是这些垂直方向的激励对  $x$  和  $y$  方向的低阶模态却没有多大贡献。但是，当然，一旦估计出整体极点，然后就需要使用所有的  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向的 FRF 估计留数或模态振型，只是在估计  $x$  和  $y$  方向的低阶模态时，仅仅使用  $x$  和  $y$  方向的激振器激励数据。

在模态参数估计过程中，最关心的是需要多次反复提取到最佳的可能极点去描述系统动态特性。然而，所有测试数据中的大部分和所有参考点对于确定系统所有的模态而言，都不

是最合适的。比如，最近测试一个大型的望远镜结构，用四个激励点作为参考点。显然，这些参考点对于结构具有方向性的所有低阶模态而言，不是最合适的。第一次进行参数估计时，使用了所有参考点得到的所有 FRF 去提取系统的极点和留数。一旦选择了估计参数，便生成了一个综合的 FRF，与实际测量的 FRF 进行对比作为验证处理的一部分。图 3a 中给出了综合的和测量的 FRF。仔细观察会注意到测量得到的 FRF 和综合的 FRF 一致性较差。然而，经过仔细评估数据，细致地选择 FRF 去提取系统极点（接着提取留数），得到了一个更优的模型。这也可以通过图 3b 中综合的 FRF 和测量得到的 FRF，进行对比得到证实。当然，这个方法要付出更多的精力，但是得到的模态参数会有相当大的改善。

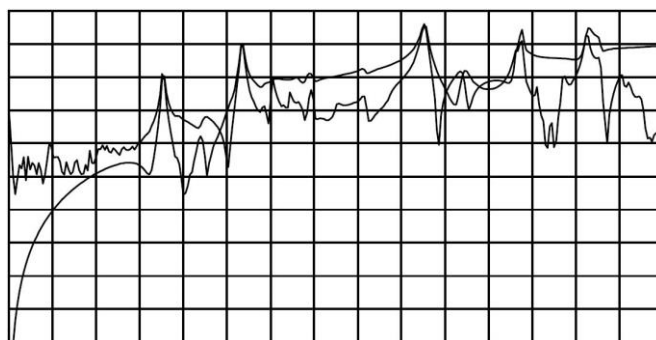


图 3a 较差的极点提取和 FRF 综合

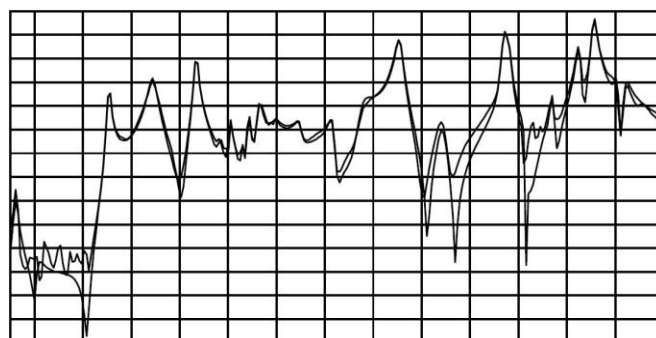


图 3b 好的极点提取和 FRF 综合

我希望这些解释能帮助你明白，当进行模态参数提取时，为什么没必要使用所有的 FRF（或者事实上是有害的）。合理选择最佳的 FRF 通常将产生更优的整体系统极点用于模态参数估计处理。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



测试设置对测量的模态数据有影响吗？边界条件和加速度计有影响吗？  
绝对有影响!!! 让我们来探讨这个问题。

毫无疑问，测试设置和使用的仪器设备可能对测量数据有影响。当被测对象为小型轻质的结构，如磁盘驱动器、涡轮叶片、壳体、计算机主板和其他一些小型轻质的结构时，这个影响尤为突出。

对于经验丰富的测试工程师而言，可能会明显考虑测试设置和使用的仪器设备对模态测试结果的影响，但是对于测试新手而言，可能不会明显考虑这些事项（最近我看了一篇对一轻质结构进行实验模态测试的报告，报告说进行了许多不同的测试和分析后，揭示了加速度计的质量对结构的固有频率有明显影响。所以，这些明显值得我们进一步讨论）。

从现实角度出发，可以直观地意识到在测试过程中，安装到结构上的仪器设备相当于在结构上直接附加了质量。然而，许多时候，我对大多数不熟悉模态测试的工程师意识不到这一点感到相当震惊。出于某些理由，认为使用的仪器设备是无干扰的。但是，事实上，安装在结构上的仪器设备，大多数情况下，对测量的频响函数有影响。理论上讲，固有频率跟刚度与质量之比的平方根相关。因此，显而易见，如果测量的加速度计的质量“添加”到结构的质量中去，那么结构的固有频率将会降低。显然，加速度计的质量越大，频率改变越显著。当然，被测对象的大小对这一点也有影响。如果加速度计安装在大型结构上，比如桥梁或者建筑物，那么加速度计的质量影响可以忽略。因此，被测结构的质量和尺寸越小，加速度计的质量影响越明显。

需要着重注意的是参与模态的不是结构的全部质量，而是结构“模态上”活跃的那部分有效质量。比如，考虑对一个带磁盘驱动器和计算机主板的大型计算机机柜进行模态测试。加速度计安装在机柜的主结构部分，可能不会引起任何问题。然而，加速度计安装在配电盘或者计算机主板上或者磁盘驱动器的外壳上，那么加速度计的重量将对测量的频率有明显的影响。经常，人们考虑加速度计的质量是相对于被测结构的总质量而言的，这时总会让人变得很迷惑。其实不然，而应该考虑的是加速度计的质量相对于结构模态上活跃的那部分质量，这时可能明显不同于相对于整个结构的总质量。

说明加速度计质量影响的最好办法是进实验室动手进行一次测试。为了说明质量载荷的影响，对一个轻质的磁盘驱动支架进行测试。这个矩形结构尺寸约为  $5 \times 3 \times 2$  英寸，用于安装一些老式的磁盘驱动器。（这些测量并不是我的炫耀点或乐事，但是能清楚地说明质量载荷的影响）。

为了获得典型的频响函数，进行三次锤击实验，分别使用三个质量不同的加速度计。一个非常轻、一个重量适中和一个比较重的加速度计分别安装在支架一侧的横梁上。仅测量  $x$  方向的激励和响应，得到驱动点的频响函数，如图 1 所示。图 1 为两种极端质量情况下的频响函数。箭头处表示两个频率，两次测量得到的频率分别为 260Hz（红色）和 271Hz（蓝色）。使用中等质量的加速度计测量为 266Hz，图中没有给出。对于这个频率，存在显著的差异。因此加速度计的质量对频率有显著影响，高阶频率受到的影响更大。



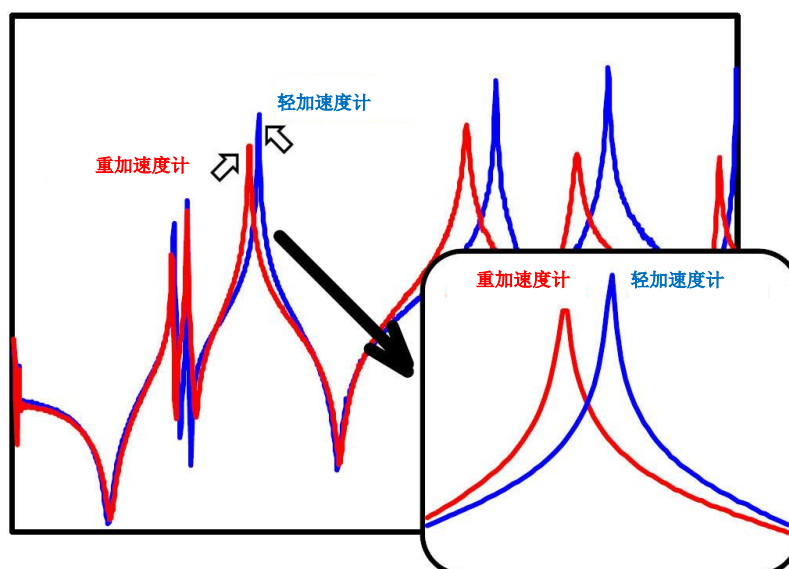


图 1 两个不同质量的加速度计得到的 FRF

另一个重要的注意事项是图示的两个低频频率，似乎加速度计质量的影响不显著。这两阶模态主要是 y 方向或者 z 方向的响应占主导地位。因为驱动点测量是从 x 方向测量得到的，加速度计实际上位于这两阶模态的节点上，因而可以忽略质量载荷的影响。

因此，由这个简单的测试可以得到两个重要的结论。首先，加速度计的质量对测试有影响。这个结论是正确的，因为定义任何系统的固有频率的公式都包括刚度和质量。其次，加速度计的安装位置对测试也有影响。如果加速度计位于某阶模态的节点（幅值为零的点），那么附加质量对那阶模态将没有影响。如果加速度计位于某阶模态的反节点（幅值最大的点），那么对那阶模态将有最严重的影响。

当然，质量载荷会引起一些问题，特别是要求频率精确测量时。这时可以使用非接触式的测试设备测量固有频率。比如，可用激光测振设备获得高品质的 FRF，而不会产生任何质量载荷影响。然而，这些设备通常都很昂贵，不是每个实验室都能用得起。也可以使用电涡流探头或者应变片进行测量，也可以得到相当好的结果。然而，这些类型传感器却不能总是方便地安装到被测结构上。

怎样才能确定质量载荷的影响？最简单的方法是在结构同一位置安装两个加速度计。用这两个加速度计进行一次 FRF 测量，第二次拿掉一个，只用一个加速度计进行测量。这将会迅速辨别出质量载荷是否是个问题。如果质量载荷有影响，那么必须采取一些调整措施。（这个问题进一步讨论不属于本节的范畴，将在以后某章节中加以叙述。）

但是这儿还有另一个问题，我觉得与质量载荷的影响同样重要，而这个问题几乎总是被忽略。许多模态测量都是在“自由-自由”状态下进行的。事实上，在地球上几乎没有办法能做到完全自由。顶多，我们只能模拟相当接近自由的状态。

使用不同的支承条件对支架进行几次测试，图 2 给出了三条 FRF 曲线。绿色为用厚泡沫支承，红色为气囊包装材料支承和蓝色为橡皮条悬挂支承。（关心的频率范围与前面讨论加速度计质量载荷的影响相同。）局部放大图的频率范围从 266Hz 到 272Hz（幅值完全不同）。观察到的频率变化量与加速度计的质量效应引起的几乎相同！因此，当每个人对质量载荷的影响都变得忐忑不安时，却很少有人考虑结构的支承条件，我也嘲笑我自己。显然，支承条件的变化同加速度计质量载荷的影响一样关键。许多情况下，支承条件的影响比质量载荷的影响更重要，因此必须多加注意！



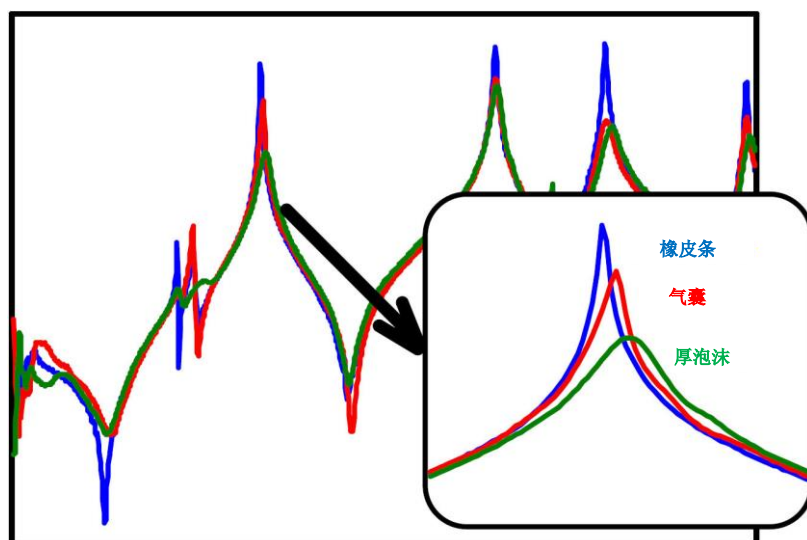
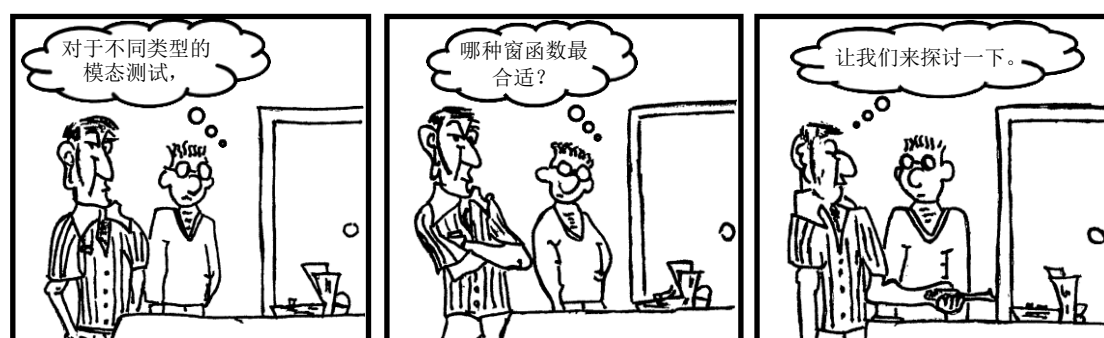


图 2 三种不同支承条件的 FRF

使用实验室已有的仪器进行了上述测试，这些测量迅速说明了你的这个问题。不需要花费太多的力气就说明了质量载荷的影响，但是同时也应该意识到使用支承系统使结构处于“自由-自由”边界状态也同样重要。我希望这些有助于回答你关于测试的问题。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



对于不同类型的模态测试，哪种窗函数最合适？

让我们来探讨一下。

这是个相当不错的问题，让我们回顾一下一些经常使用的激励技术和相关的窗函数。事实上，FFT 变换包含一些限制条件，必须首先考虑这些限制条件。这些条件帮助我们明白为什么要使用某种类型的激励技术和哪种形式的窗函数最合适。

首先应记得傅立叶变换定义的时间区间为 $-\infty$ 到 $+\infty$ 。只要测量到整个瞬态信号或者捕捉到周期信号，那么 FFT 变换的要求是满足的。如果不满足这一点，那么会引起严重的信号处理问题，称为泄漏。窗函数是加权函数，用于最小化泄漏造成的影响，但不能完全消除泄漏。因此有必要强调说明一下这个真实存在的问题。基于这些事实，让我们讨论实验模态测试不同类型的激励信号，并说明为这些激励信号典型施加的窗函数。

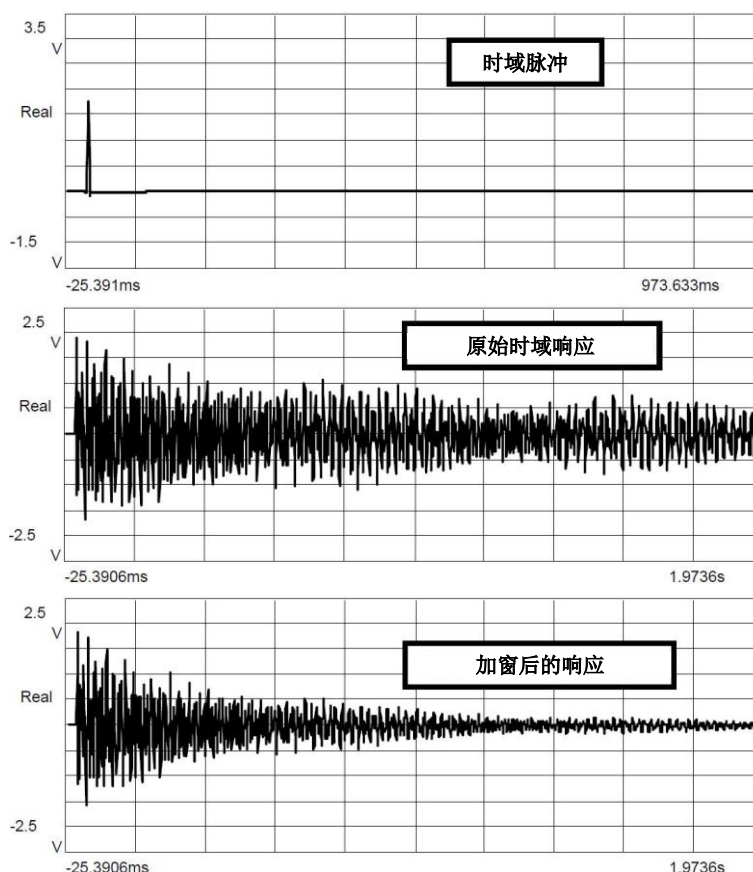


图 1 锤击激励和响应

锤击法测试是模态测试非常常用的测试方法。它总是会引起一些类型的瞬态响应，而该响应为一系列指数衰减的正弦波的组合。这种情况下，如果能完全捕获到瞬态响应信号，因而满足 FFT 变换的要求，则不存在泄漏。但是大多数结构，特别是小阻尼结构，指数衰减

响应信号经常在采样时间内没有完全衰减。那么，这意味着不满足 FFT 变换的要求。这种情况下，通常为响应信号施加指数窗，从而，加窗后的信号可以更好地满足 FFT 变换要求。图 1 给出了锤击法测试的时域脉冲、原始的时域响应和加指数窗后的时域响应。

加指数窗的响应能更好地满足 FFT 变换的要求。这时整个响应信号似乎都可以捕获到，但其实是以加窗为代价。替代应用指数窗的一个方法是调整测量带宽，从而考虑捕获更长的时域数据，**或者**增加样本总数，其直接效应就是获取更长的时域数据。无论如何，如果信号在采样周期的末端本质上没有衰减到零，那么必须加指数窗，以减少化泄漏所造成的影响。

在许多数据采集系统中，也为激励脉冲部分施加力窗。加力窗是为了消除可能来自于力锤激励通道的噪声。通常，设置力窗的宽度约为数据样本窗口的 10%，使得力脉冲完全位于这个单位增益窗内，力窗之外的时域样本纪录则被加权置零。力窗不一定总是必须的，但是几乎所有的数据采集系统都有。需要着重注意的是，力窗**从来不能**消除测试过程中可能出现的二次连击的影响。使用力窗消除连击所造成的影响，将严重扭曲输入力谱。

既然已经讨论过了锤击激励，现在让我们讨论激振器进行实验模态测试时，为常用的激励信号所施加窗函数的考虑事项。最普遍的激励方式是随机激励。但随机激励的问题在于信号在采集周期内永远不重复。因此，必须加窗，以减少泄漏。

随机激励最常用的窗是汉宁窗。但是必须指出，不管使用何种窗函数，对测量数据都将有影响，但又必须加窗减少泄漏，因此，加窗是不可避免的灾祸。记住，加窗仅仅是减少泄漏，决不能消除泄漏。所有的窗函数对测量数据的幅值都有影响，使得测量到的幅值小于真实值，并且使得结构表现出来的阻尼比真实存在的要大。图 2 为由随机激励引起的典型输入-输出测量，并且对输入和响应通道施加了汉宁窗。汉宁窗的使用使得幅值失真了 16%。当然，这时的失真比不加窗的泄漏造成的失真要少得多。

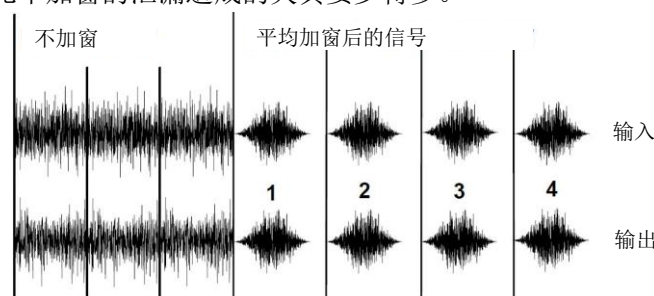


图 2 典型的随机测量

因为问题与泄漏和加窗使数据失真相关，因此开发了其他一些激励技术，特意用于消除泄漏和窗的使用。这些激励技术，包括伪随机、周期随机、猝发随机、正弦快速扫频和数字步进正弦等（所有这些激励技术将在以后文章中加以讨论）。当今模态测试最常用的激励技术是猝发随机，故在这儿将讨论它。

问题的本质是，除非捕获到整个瞬态信号或者捕获周期信号，不然总是存在泄漏。不管怎样，所有的这些激励技术都试图努力满足 FFT 变换的要求。如果满足要求，那么测量不存在泄漏，因而不需要加任何窗函数。猝发随机激励方式施加在结构上的激励信号的开始和结束都位于采样周期内。这直接表明 FFT 变换要求完全满足，信号不存在泄漏，不需要加窗函数。通常，习惯设置猝发信号长度为采样长度的 50%~80%，也可以由用户指定。虽然猝发激励信号不存在泄漏，但是必须为响应通道考虑其他一些注意事项。

当激振器停止激励时，结构的响应并不会立刻停止。激振器停止激励后，结构的响应通常按指数衰减（事实上，当激振器停止激励后，还有一些激励力存在激励通道中，这部分输入也应该作为输入力的一部分）。图 3 为一个猝发随机信号典型的输入-输出。

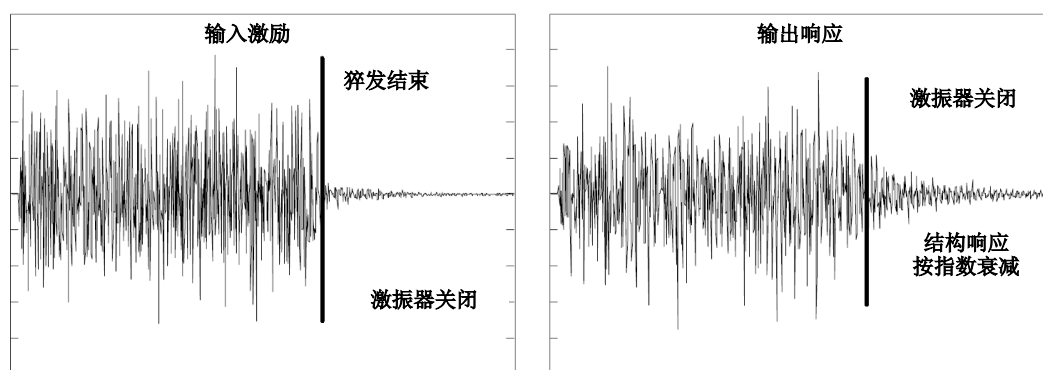


图 3 典型的猝发随机测量

只要测量的响应在采样周期末端本质上衰减到零，那么整个信号都能捕捉到，因而不需要加窗函数。然而，如果情况不是这样，那么需要作出一些调整。为了捕捉到整个瞬态信号，那么，可以缩短猝发激励的时间，或者调整带宽以便提供更长时间的数据采集，或者提高谱线数，本质上也是延长采样时间。所有这些措施通常有助于确保整个结构响应在采样周期内完全捕获到。通常，不需要为这类猝发随机加窗函数。猝发随机的真实目的就是消除任何窗函数的使用。那么猝发随机将提供无泄漏的测量，满足 FFT 变换的周期性要求。

现在，我希望你明白，哪种窗最适合实验模态测试最常用的激励方式（其他激励方式将在以后的文章中加以讨论）。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



复模态和实模态有什么不同?

有太多需要解释, 让我们从一些简单实例开始。

这个问题经常出现, 让许多人都感到迷惑。因此让我们讨论一些细节, 以说明它们之间的差异。不幸的是, 在这儿为了帮助说明, 我们不得不涉及到一些数学公式和一些基本理论。

让我们首先考虑无阻尼的方程组, 然后讨论有阻尼的情况: 比例阻尼和非比例阻尼(一般阻尼)。这样它们之间的不同就变得显而易见了。将用一个简单例子说明这些观点。一般的物理系统的运动方程可以写成

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{F}\}$$

这儿 $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{C}]$ 和 $[\mathbf{K}]$ 分别表示质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵, 连同相应的加速度、速度和位移以及外力一起组成运动方程。

变换到模态空间后, 其形式为

$$\begin{bmatrix} \backslash \\ \bar{\mathbf{M}} \\ \backslash \end{bmatrix} \{\ddot{\mathbf{p}}\} + \begin{bmatrix} \backslash \\ \bar{\mathbf{C}} \\ \backslash \end{bmatrix} \{\dot{\mathbf{p}}\} + \begin{bmatrix} \backslash \\ \bar{\mathbf{K}} \\ \backslash \end{bmatrix} \{\mathbf{p}\} = [\mathbf{U}]^T \{\mathbf{F}\}$$

模态质量矩阵、模态刚度矩阵和某些情况下的模态阻尼矩阵都为对角阵。模态振型将解耦质量矩阵、刚度矩阵和某些特定类型的阻尼矩阵。为了理解这些情况, 给出一个简单的例子。

例子中定义如下矩阵

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{C}_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; [\mathbf{C}_p] = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.1 & 0.4 \end{bmatrix}; [\mathbf{C}_N] = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

首先, 考虑无阻尼的情况。考虑质量矩阵 $[\mathbf{M}]$ , 刚度矩阵 $[\mathbf{K}]$ 和阻尼矩阵 $[\mathbf{C}_0]$ , 由这组矩阵的特征值求解产生的频率、留数和振型为

$$\lambda_1 = 0 + 0.3737\mathbf{j}; \mathbf{a}_1 = \begin{Bmatrix} 0 + 0.1230\mathbf{j} \\ 0 + 0.2116\mathbf{j} \end{Bmatrix}; \mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} 0.2459 \\ 0.4232 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.72 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0 + 1.0926\mathbf{j}; \mathbf{a}_2 = \begin{Bmatrix} 0 + 0.1868\mathbf{j} \\ 0 - 0.0724\mathbf{j} \end{Bmatrix}; \mathbf{u}_2 = \begin{Bmatrix} 0.3735 \\ -0.1447 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.387 \end{Bmatrix}$$

注意到模态振型为带符号（+或-）的实数值。第 1 阶模态的两个自由度符号相同，这表明这两个自由度彼此同相位，只是幅值大小不同。第 2 阶模态的两个自由度符号相反，这表明这两个自由度彼此反相位，且幅值大小也不同。

现在考虑第二种情况，比例阻尼，阻尼与系统的质量和/或者刚度成比例。这儿考虑质量矩阵  $[M]$ ，刚度矩阵  $[K]$  和阻尼矩阵  $[C_p]$ 。由这组矩阵的特征值求解得出的频率、留数和模态振型为

$$\lambda_1 = -0.0579 + 0.3693j; \mathbf{a}_1 = \begin{Bmatrix} 0 + 0.1244j \\ 0 + 0.2141j \end{Bmatrix}; \mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} 0.2488 \\ 0.4282 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.72 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -0.1097 + 1.0871j; \mathbf{a}_2 = \begin{Bmatrix} 0 + 0.1877j \\ 0 - 0.0727j \end{Bmatrix}; \mathbf{u}_2 = \begin{Bmatrix} 0.3754 \\ -0.1455 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.387 \end{Bmatrix}$$

注意到这组特征值求解得出的模态振型与无阻尼的情况相同，这是因为阻尼与系统的质量和/或刚度成比例。这样产生的模态称为“实模态”。因此，显然无阻尼和比例阻尼情况得出的模态振型完全相同。

现在考虑第三种情况，此时阻尼不与系统的质量和/或者刚度成比例，即非比例阻尼。考虑质量矩阵  $[M]$ ，刚度矩阵  $[K]$  和阻尼矩阵  $[C_N]$ 。这组矩阵得出的频率、留数和振型为

$$\lambda_1 = -0.0162 + 0.3736j; \mathbf{a}_1 = \begin{Bmatrix} -0.0071 + 0.1288j \\ -0.0048 + 0.2116j \end{Bmatrix}; \mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} 0.2456 + 0.0143j \\ 0.4232 + 0.0095j \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -0.1005 + 1.0872j; \mathbf{a}_2 = \begin{Bmatrix} -0.0071 + 0.1885j \\ -0.0048 - 0.0726j \end{Bmatrix}; \mathbf{u}_2 = \begin{Bmatrix} -0.3771 + 0.0142j \\ 0.1451 + 0.0096j \end{Bmatrix}$$

对于这种情况，模态振型不同于前面的两种情况。首先，模态振型是复数值。仔细检查这些振型，可以看出每阶模态的各个自由度之间的相对相位关系已不再是完全同相位或反相位了。这种情况下产生的模态称为“复模态”。这跟前面两种情况大不相同。系统阻尼与系统的质量和/或刚度不相关时，得出的模态就为复模态，此时的阻尼称为非比例阻尼。为了求解特征值，使用形式稍稍不同的状态矢量空间的方程，这样便于进行求解。

考虑复模态时，所有的方程通常都变得更复杂。实模态与复模态之间一些简单结论总结如下：

#### 实模态的一些特征：

1. 通过驻波描述模态振型，而这些驻波的节点位置是固定不动的；
2. 所有点同一时刻通过它们的极大和极小位置处；
3. 所有点同一时刻通过零点位置；
4. 模态振型为带符号的实数值；
5. 结构上所有点同任何其他点，要么完全同相位，要么完全反相位；
6. 无阻尼得到的模态振型与比例阻尼的模态振型相同，这些振型解耦质量、阻尼和刚度矩阵。

#### 复模态的一些特征：

1. 通过行波描述模态振型，节点似乎在结构上移动；
2. 所有点不在同一时刻通过它们的极大值位置处，一些点似乎落后其它点；
3. 所有点不在同一时刻通过零点位置；



4. 模态振型不能用实数描述，为复数；
5. 不同自由度之间相位关系一般，没有完全同相位或者完全 180 度反相关系；
6. 由无阻尼情况得到的模态振型将不能解耦阻尼矩阵。

为了进一步形象化这些特征，绘出了悬臂梁某阶模态所对应的复模态振型和实模态振型，如图 1 所示。图 1a 为实模态，自由度之间的相对相位关系完全同相位（如图中蓝色和红色表示的自由度）或者完全 180 度反相位（如图中的绿色表示的与蓝色和红色表示的自由度）。而复模态不具有这种简单的相位关系，模态振型必须通过幅值与相位或者实部与虚部两者同时描述，如图 1b 所示。图 1 是有意去形象化它们之间的相位关系。

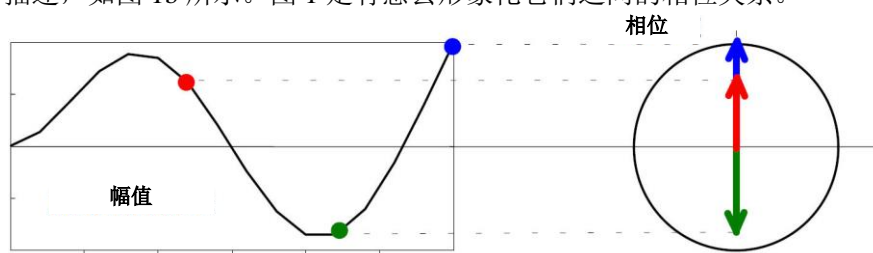


图 1a 比例（实）模态

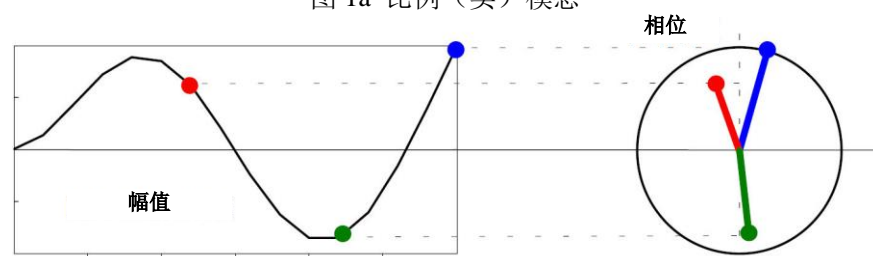


图 1b 非比例（复）模态

需要着重指出的是相位关系在 **FRF** 测量中一直可见，有时这可能是复模态的指示，但必须小心过早下结论。数采系统、使用的仪器设备、信号处理、**FFT** 和模态参数估计，所有这些步骤都可能扭曲测量，使得模态振型“似乎”宛如复模态振型。

虽然这儿还有太多的东西需要加以讨论，但我希望这些简单的解释有助于你从更好的视角去理解这些。回想一下，如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



能为我解释模态测试数据采集的基本步骤吗?

有太多需要解释, 但让我总结一些基本步骤。

基本的数据采集过程分几个步骤, 并且锤击法测试和激振器测试又稍微有些不同, 在这将分别讨论。

对于锤击法测试, 用力锤或其他一些类型的冲击设备对结构进行激励, 此时作用在结构上的力信号是可测的。通常使用加速度计, 但有时也用激光传感器或者其他类型的传感器测量结构的响应。通常, 数据采集系统的第一通道测量作用到结构上的激励力。虽然这对大多数采集系统来说不是必要的, 但是直到今天, 许多测试工程师仍然遵循这个习惯。其余通道测量响应信号 (依赖使用的采集系统是双通道还是多通道系统)。为了开始数据采集, 通常对锤击设备所在通道加触发条件。开始测量时必须为数采系统指定一个最小的触发电压。对于大多数模态测试而言, 通常合适的触发量级为激励力对应的最大电压的 10%~20%。对于大多数采集系统而言, 为了捕捉到整个锤击设备的瞬态力脉冲信号, 必须为力信号所在通道指定预触发延迟。通过使用预触发延迟, 不会遗漏锤击力脉冲。

传感器采集到的数据, 在进行任何数字化之前, 总是要通过一个低通、模拟滤波器。这样做的目的主要是滤掉那么不感兴趣的高频成分, 防止出现混叠。这些模拟滤波器通常称为抗混叠滤波器, 用于过滤夹杂在信号中的高频成分, 否则这些高频成分会浸污测量的频率成分。

然后数据传送到模数转换器 (ADC), 在这对数据进行采样并转换成数字信号。这有两点值得关注。数据必须以一定的速率进行采样, 以便将时域数据转换到频域时, 能充分描述其特征。通常, 采样频率至少为关心的最高频率的二倍。如果处理数据时, 需要刻画数据的时域特征, 那么采样频率至少设置为关心的最高频率的 10~20 倍, 这样才能充分描述系统的时域特征。为了合适地表征信号的幅值特征, 模数转换器必须设置合适的电压量程。如果设置不合理, 那么测量信号中存在的量化误差将可能成为新的问题。大多数数据采集系统都具有一种功能, 称为自动量程, 帮助所有的数据采集通道设置合适的电压量程。模数转换器的量程也可手动设置, 但必须不断尝试设置, 以确保所有的采集通道量程设置合理。否则, 量程设置太高, 信号会遭受量化误差; 设置过低, 信号会因过载而削波。

这样一来, 描述锤击和响应的未经任何处理的数字形式数据才可用。根据实际信号的时域特征, 可能需要加窗, 以便将任何泄漏减少到最小程度。如果锤击法测试数据采集过程没有完全捕捉到整个瞬态信号, 那么将会出现泄漏。如果锤击通道存在显著的噪声, 那么可能需要加力窗, 以减少噪声的输入。如果响应信号在采样周期末端还没有充分衰减到零, 那么需要为响应信号加指数窗, 以避免因傅立叶变换处理引起的信号失真。

加指数窗之前, 需要考虑两个信号处理方法。为了采集更长的时域信号使得响应信号自然地衰减到零, 可以考虑减少带宽或者增加谱线条数, 两个方法最终都将延长总的采样时间。这样采样时间更长使得响应信号自由地衰减, 因而可以减少指数窗的应用。

对于激振器测试, 通常数据采集系统的第一通道测量激振器的激励信号 (这不是必须的,

但是许多人仍遵循这个习惯)，数采系统其余通道测量响应信号。依据使用的激励技术，触发也将不同。对于随机激励，通常使用“自由触发”模式。然而，其他的激励技术（如猝发随机，正弦快速扫频等），通常采用信号源或力信号触发。另外，有时需要为猝发随机指定预触发延迟。

激振器大多数的激励信号，不需要加窗，因为这些信号本身具有“特殊”的特点，能提供无泄漏的测量，因而满足 FFT 变换的要求。然而，如果采用任意的激励信号，如随机激励，那么就需要加窗，如汉宁窗，以最小化泄漏。

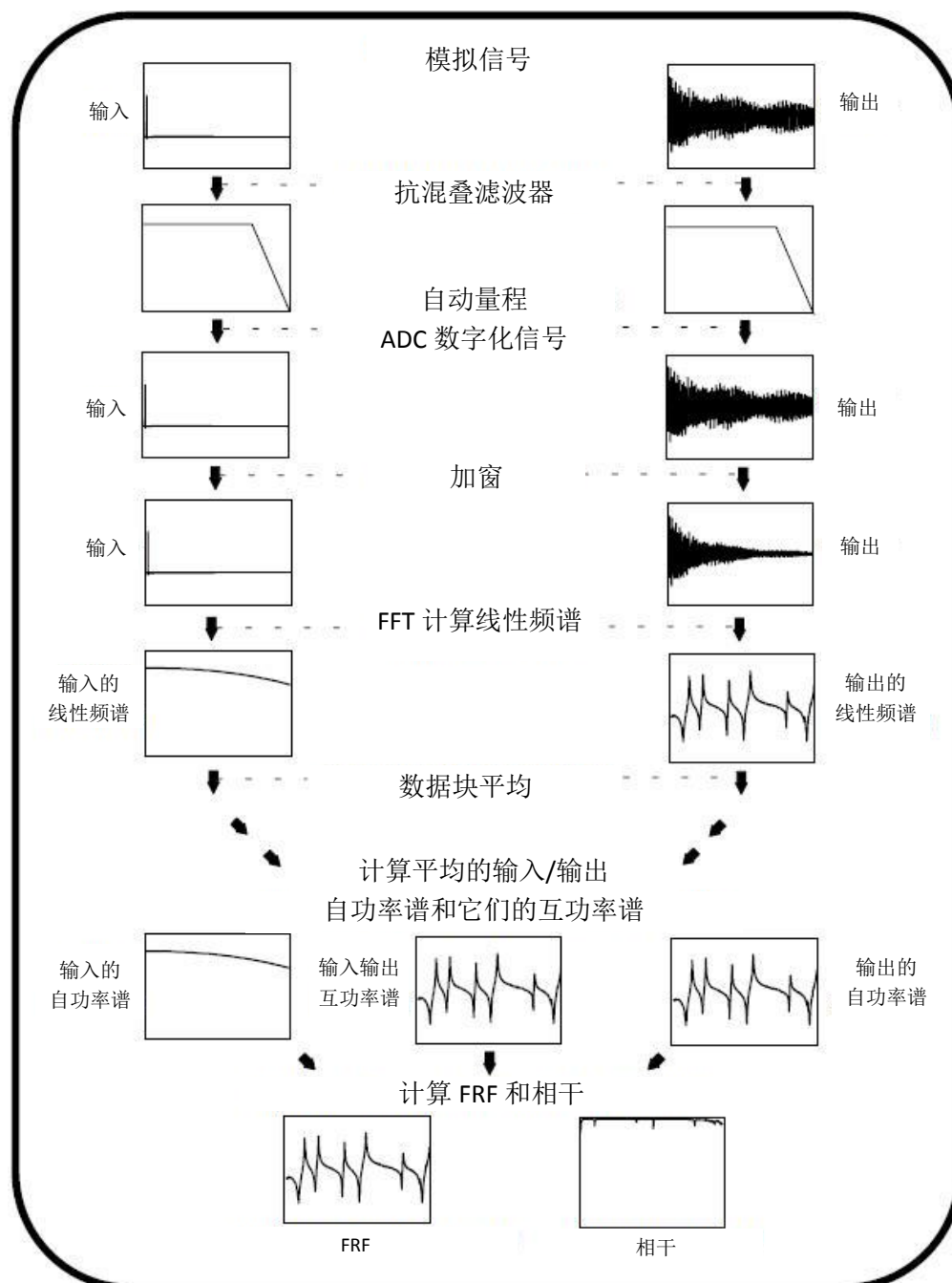


图 1 锤击法测试流程图

无论是锤击法测试还是激振器测试，都需将捕捉到的时域数据通过 FFT 变换到频域。FFT 变换提供输入和输出信号的线性傅立叶谱（注意这些函数都是复值函数）。然后提供输入自谱( $G_{xx}$ )，输出自谱( $G_{yy}$ )和输入-输出的互谱( $G_{yx}$ )。这三个谱使用各自的数据纪录进行平

均。一旦得到  $G_{xx}$ 、 $G_{yx}$  和  $G_{yy}$ ，那么就可计算频响函数和相干了。虽然频响函数可以使用不同的形式，但当今绝大多数单输入模态测试中， $H_1$  是频响函数最常用的形式。图 1 和图 2 分别描述了锤击法和激振器的测试流程。

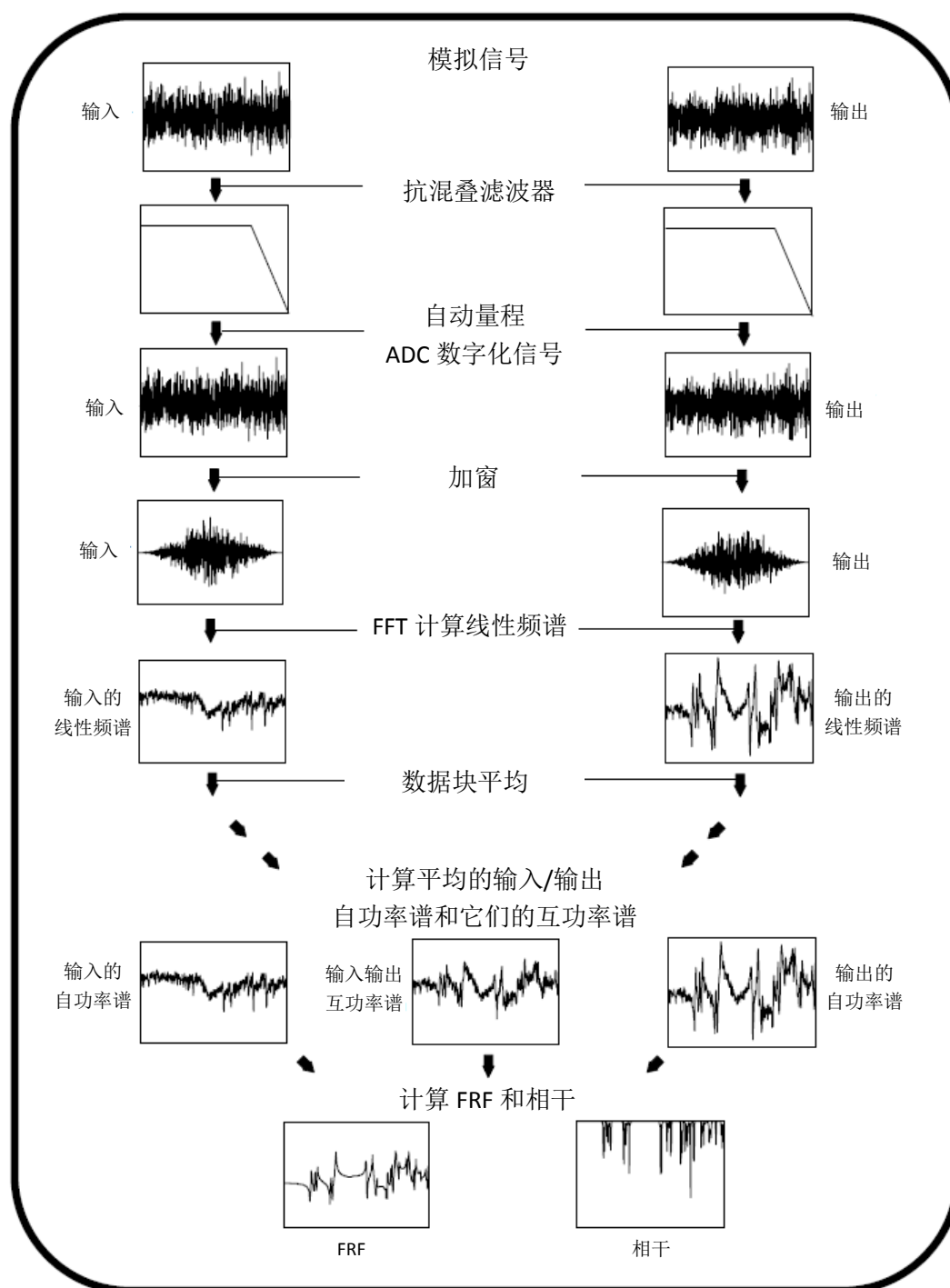


图 2 激振器随机激励测试流程图

虽然开发的实验模态模型只要求测量频响函数，但很多时候，自谱、互谱，以及相干还是作为数据存储的一部分（对于大磁盘存储空间，没有理由不存储所有的测量数据）。

显然，这有太多的方面需要讨论，但是我希望这些能帮助你明白实验模态测试整个过程中一些基本测量步骤。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



MIMO测试有什么现实优势？为什么不只使用SISO然后移动激振器？  
让我们讨论这些区别。

相对于单输入单输出（SISO）数据采集而言，多输入多输出（MIMO）有许多优势。来自多个激振器的激励能量可以更均匀地遍及整个结构，因而能得到更理想的频响函数（FRF）。而仅使用单个激振器，得到的频响函数通常没有由多个激振器得到的好，特别是测试大型结构。使用单个激振器激励，很多时候很难使激励能量充分遍及到整个结构。

另一个重要因素是激振器设置对被测对象有影响。使用单个激振器进行测试，必须多次设置激振器，以便为多参考点曲线拟合提供必要的多参考点数据。很多时候，测试设置对测量的FRF可能有影响。当多参考点数据是由单个激振器激励得到时，这会是个严重的问题。相对于同样的数据由SISO测试采集得到，MIMO测试采集到的数据更一致。

为了了解它们的差异，分别对一个结构进行单个激振器激励和多个激振器激励，采集到四组不同的数据：

- 随机激励和加汉宁窗的SISO
- 猝发随机激励和不加窗的SISO
- 随机激励和加汉宁窗的MIMO
- 猝发随机激励和不加窗的MIMO

四种情况下，在两个激励位置之间采集互易的FRF。为了最小化质量载荷的影响，四种情况下安装在结构上的加速度计保持不动。四种情况下，仅仅是连接和断开连接激振器（激振器实际上都安装在测量位置，必要时连接和断开连接，以最小化激振器设置带来的影响）。图1给出了四种情况下的FRF，每个子图都包含两个互易的FRF： $H_{ij}$ 和 $H_{ji}$ 。

初看起来，似乎四种情况得到的数据相似，FRF似乎也相当好。然而，对每种情况进行更仔细地检查，容易看出互易的FRF的差异，如图2所示。

首先，观察图2（a），随机激励和加汉宁窗的SISO测量得到的FRF。注意到两条曲线重叠性差，特别是在第一个共振峰处。同时也注意到即使施加了汉宁窗，随机激励的FRF仍有显著的差异，这是因为随机激励过程中存在泄漏的影响，虽然施加了汉宁窗，但还是不能彻底消除泄漏造成的影响。FRF峰值移动，直接归因于激振器设置和连接激振器与结构的顶杆刚度的影响。测试设置显然对测量的FRF数据有影响。

接着观察图2（b），猝发随机激励和不加窗的SISO测量得到的FRF。注意到两条曲线在第一个共振峰处重叠性仍然很差。然而，相对于加汉宁窗的随机激励，猝发随机激励提供了更优的测量结果。猝发随机激励通常提供更优的整体测量，因为无须对采集数据加窗。这是因为测量满足FFT的周期性要求。随机激励通常需要多次平均，以减少测量到的FRF数据的差异，但其结果仍然没有猝发随机激励得到的结果好。

然后观察图2（c），随机激励和加汉宁窗的MIMO得到的FRF。相比较前两种情况，此时在第一个共振峰处FRF重叠性较好。然而，大体上FRF仍有较大的差异，显著的差异主要存在反共振峰处。因为两个激振器同时安装在结构上，测试过程中激振器安装的影响是相似

的。因此，共振峰不受设备安装的影响。

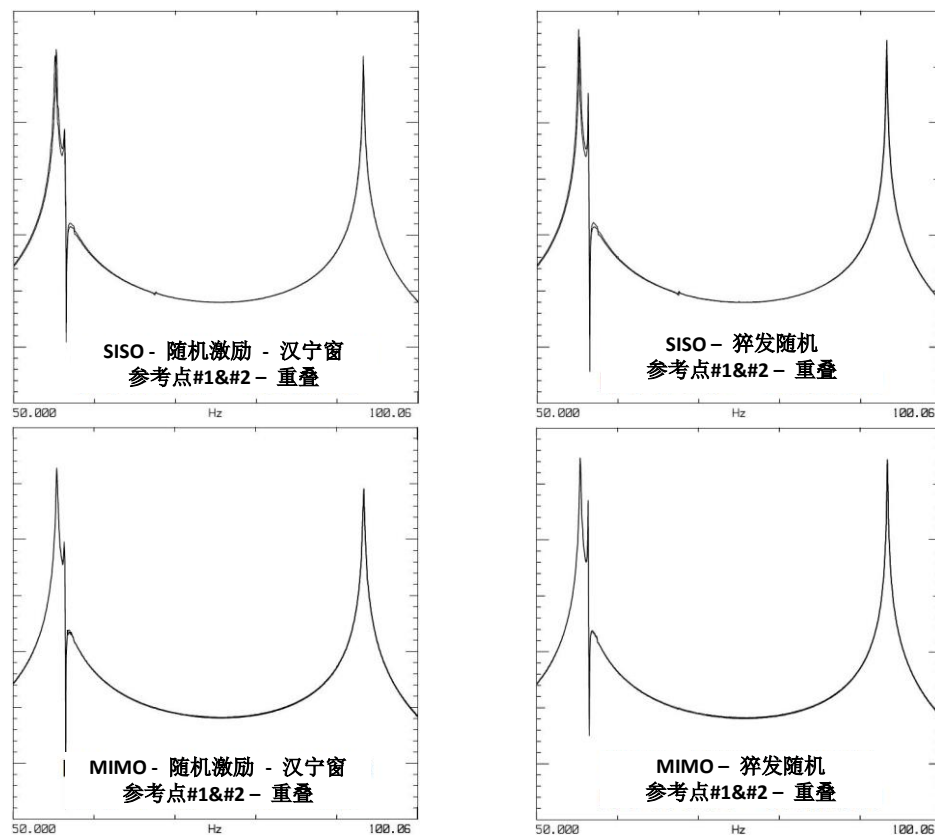


图1 比较四种情况下50~100Hz内互易的FRF

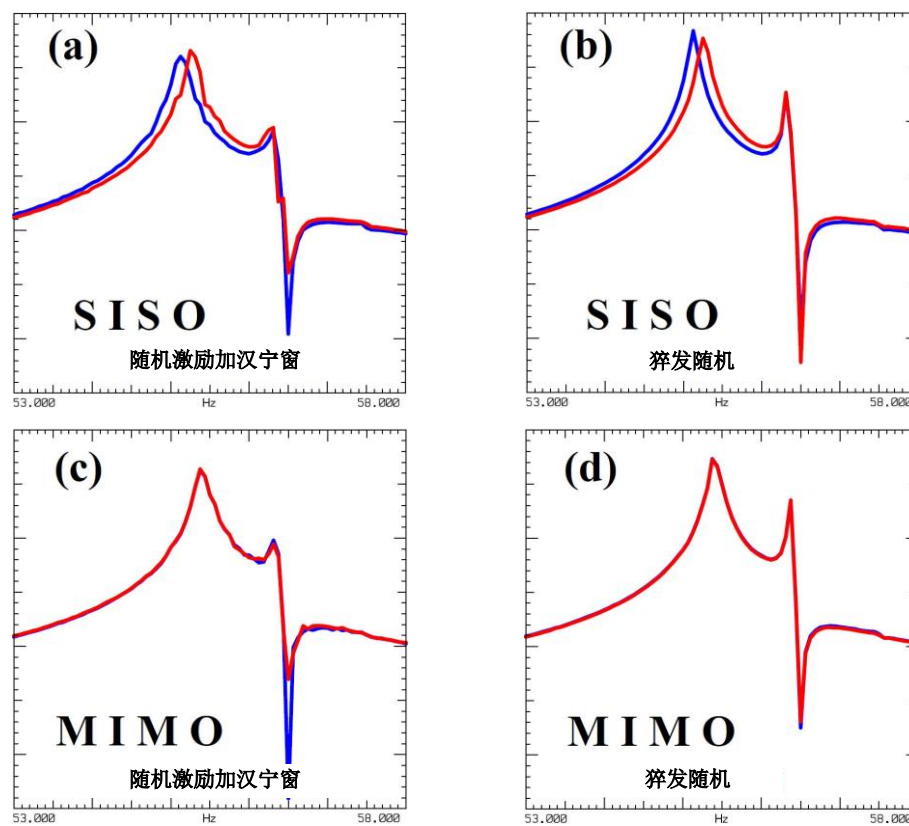


图2 比较四种情况下53~58Hz内互易的FRF

最后观察图2 (d)，猝发随机激励和不加窗的MIMO测量得到的FRF。这次的互易FRF



几乎完全相同。显然，这种情况的测量是四种情况中最优的。猝发随机MIMO激励具有最佳的整体特征：测量不需要加窗，因为不存在泄漏；互易的FRF具有更优的一致性，因为测试过程中，激振器同时安装在结构上。

因此，由SISO数据和MIMO数据估计参数时，显然MIMO产生更一致的数据。估计共振峰时，SISO测量显然存在差异。另外，相对于加汉宁窗的随机激励，猝发随机激励产生的结果更优。

图3给出了另一个感兴趣的方面。注意两次SISO测试和MIMO测试都产生了不同的结果，这清楚表明了测试设置对测量FRF有影响。当然，我们意识到FRF的峰值可能受激振器顶杆刚度的影响，但是至少对于MIMO而言，得到的FRF峰值更一致相关。（这可能是非常关键的方面，尤其是在使用多参考点模态参数估计技术提取系统振型时。）

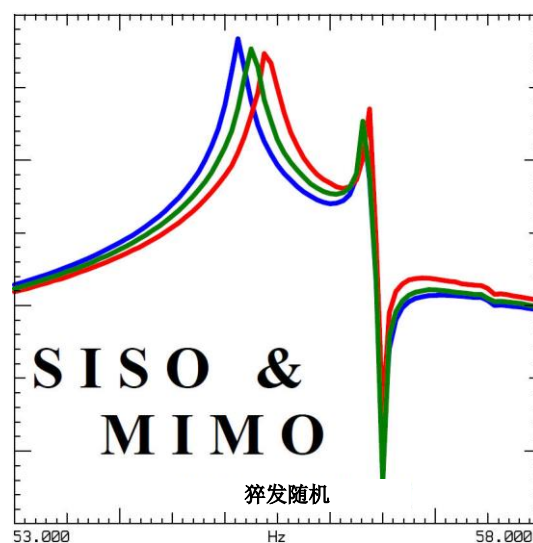
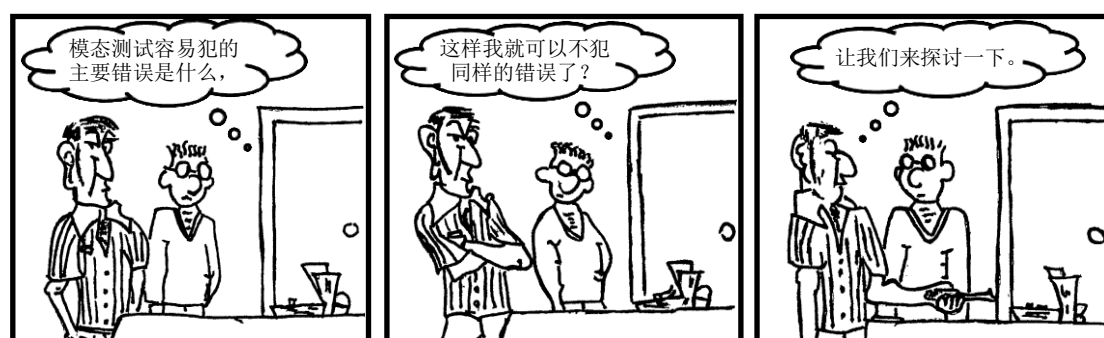


图3 SISO和MIMO的FRF比较

我希望这个例子有助于说明MIMO测试技术的优势。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



模态测试容易犯的主要错误是什么，这样我就可以不犯同样的错误了？  
让我们来探讨一下。

在模态测试和分析过程中，人们经常犯一些严重的错误，多年来我见到许多这样的例子。一些错误相当有趣，一些又非常严重。因此让我们来探讨一些我称之为“模态测试趣闻”的错误。在过去几十年的模态测试中，我已碰到过很多这样的“趣闻”。

**锤击测试和相干：**很多很多年前（刚好几个月前又碰到），我见到模态测试工程师仅仅对每个测量位置平均一次（也就是每个测点仅锤击一次）。当问他为什么这样做时，他非常肯定的回答说，既然相干为1，为什么还要不厌其烦地进行多次锤击测量，锤击一次得到的相干多好呀！我见过很多人中过这个圈套。相干是一个只能通过多次平均测量估算的函数，只进行一次平均，相对于进行的唯一一次测量而言相干函数没有任何变化。因此，相干函数值只能是1，但是这明显不能指示测量是可接受的。你只能使用相干函数去评估一组平均的函数的变化。多次平均是必须的。

**参考点位于某阶模态节点处：**模态测试参考点位置（移动力锤测试中的固定不动的响应测点和锤击或激振器测试中的固定不动的输入位置）必须不能位于某阶模态的节点位置。节点位置是那阶模态响应为零的位置。如果参考点位置没有响应，那么怎么可能得到理想的FRF。记得多年前，一组人对一个大型的悬臂类结构进行模态测试，采用非常昂贵的低频加速度计。考虑到测试设备有可能从结构上掉下来，因此，他们将参考加速度计安装在悬臂结构的底部，当然这地方没有响应可供测量，因此FRF非常差。另一次对一个加筋面板组成的箱式结构进行模态测试，所有的测点都位于刚性加强筋的十字交接位置，没有一个加速度计安装在结构面板上。对于这个特定的结构，感兴趣的模态主要跟面板的响应有关。而所有的加速度计测量位置本质上位于所有模态的节点位置。不幸的是，在寻求指导和帮助之前，一些人已这样工作了好几个月，获得了多组无用的数据。因此，参考测点必须位于有响应可测量的位置，避开模态节点。

**质量载荷影响：**在前面一些文章中已经讨论过质量载荷的影响。测试仪器的质量会影响FRF，并给出错误描述的系统固有频率。必须多次测试，以确定质量载荷的影响是否存在，有多大影响。这个影响可能较显著或者相对无关紧要。我曾经做过一次质量载荷的试验，并且很难消除质量载荷的影响。上世纪80年代早期，我参与潜水艇推进系统的绝缘部件的阻抗测试。正在评估新的设计，阻抗测试也在进行，测试频率范围超过5KHz，采用新技术，那时称为数字步进正弦方法，每次测试需要近3个小时。每个工况需要测量多次，需要评估多个原型，而测量仪器只是一个两通道的分析仪，按紧凑的进度安排完成全部测试任务需要全天不间断地进行测试。测试配置包括一组用气囊支承的2吨重的水泥块体，块体用绝缘系统相隔离。有一个特定的合作学生（高约6.5英尺，重约350磅）帮忙测试，负责三班（测试按三班倒进行）的测试。三个月后，项目结束，分析人员分析数据发现，其中一些数据有问题，这些数据在质量方面，与其他数据相比似乎有400磅的差异，导致频率产生了偏差。他们的结论让我不寒而栗，因为我记得每天早上来到车间的装配区域，而这地方正是测试现

场，记得看到水泥块体上有一个枕头和毛毯。经过一番长久的探讨之后，确定原来是一旦测试开始后，这个合作学生就爬到气囊支承的水泥块体上小睡一会，而此时测试正在进行中。因此，你能想象，解释这个特殊的测试问题有多么困难。所有的测试都有详细的纪录日志，这样就很容易确定哪些测试由这个合作学生负责完成的，因此检查测量数据，就能确定使用的数据哪些是不合适的。没人喜欢一直详细纪录测试日志，但在这种情况下测试日志提供的信息就非常宝贵了。我不认为每人都能轻易地消除质量载荷的影响。因此，请密切注意质量载荷！

**连击和力窗：**很多时候，锤击法测试时，连击是不可避免的。我多次见到测试工程师使用力窗移除二次连击中第二个力脉冲。他们的处理思路是，既然我明确不希望发生二次连击，为什么不将不想要的第二次锤击置零。初想起来，这似乎是合理的，但现实情况是结构已经受到了二次连击作用。因此，通过加力窗试图从分析角度上消除第二次锤击的影响是完全不正确的。实际上结构对二次连击已经产生了响应，绝不可能通过加力窗就能消除二次连击的影响。

**每次平均使用不同的测点：**这一点，你完全不用怀疑，真的有人这么干。多年前，我亲眼见证过一次这样的锤击测试。测试的结构相当简单，但是得出来的所有模态振型完全杂乱无章。检查一些易出错的方面以后，进行了长时间的讨论，确定为什么在25个平均以后，这样简单的结构的相干还是如此的差。结构上共有25个测点，测试工程师为每个测点进行了25次平均。不幸的是，每个测点的测量数据都是由25次测量数据之和组成，而这25次测量数据是锤击了结构上每一个测点得到的，即每个测点锤击一次。实质上每个FRF都平均了25次，而这25次平均是锤击结构上全部25个测点的平均。这样一个平均的FRF标识为结构上一个测点的FRF。这个过程重复了25次，直到所有的测点测量完毕为止。显然，这是完全错误的。结构上一个给定测点的平均FRF的数据必须来自对该测点多次锤击的平均。我实在不敢相信有人会那样做。

**坐标系和测点方位信息：**合理确定模态测试的测点和测点方位是一个相当简单的过程，但是，有时也会因这些信息不正确而产生错误。一个简单有效的预防方法是在测试对象上清楚地标明坐标系。我经常用胶带在地板上清楚地标明x、y和z方向。很多人在背后嘲笑我这种做法，但我从来没有搞错模态测试中测点的方位信息，而其他的人却经常弄错。因此，我相信“谁笑到最后，谁才笑得最甜”，现在我还嘲笑我见过的这些错误。记得一次测试悬置系统上的发动机，测试主要目的是确定悬置系统上发动机的刚体模态，这些刚体模态频率通常都很低。一天我接到了一个电话，说发动机的模态测试结果表明10Hz内有一阶弹性模态。这是极不可能的，我怀疑所有测点位置的测点和方位是否确定正确。测试人员非常武断地告诉我，说他们都是经验丰富的模态测试工程师，清楚地知道怎样确定这些基本信息。不想跟他们争论，我要求检查测试数据。经过仔细检查他们的数据，问题就清楚了，原来他们将发动机一个面上所有X方向的传感器都反向了180度（基本上，他们都指向了反方向，因为这是在模态分析软件中指定的）。一旦更正了这些测点的方位，发动机的刚体模态就如预料的一样出现了。测点和方位信息是相当简单直观的，正确确定这些信息是结构几何生成中重要的一步。

**有限元模态不总是正确：**许多人都听到过这样的话：“人人都相信测试结果，除了测试工程师；没有人相信分析模型的结果，除了分析者”。十年前测试一个大型人造卫星结构，为了准确确定激振器的激励位置，使用有限元模型进行了详细的预测试分析。分析模型确定一些激振器沿长悬臂结构长度方向分布，结构安装在巨大的质量块体上，但是两个水平激振器安装在一个方向，垂直于悬臂结构的长度方向。当怀疑忽略了另一个水平方向的激励时，分析者坚定地回答，在另一个水平方向没有必要安装激振器，因为测试之前进行了精心的分析，表明选择的激励方向已明确激起了结构所有模态。但是这个分析模型不完全正确（实际

上在分析模型中错误地定义和分布了许多集中质量单位)。因此, 预测试分析得到的结果是有偏差的, 因为有限元模型存在错误, 这样就提供了不精确的信息。参考点位置的选择不是一项容易的工作。有限元模型, 如果可用的话, 是帮助确定参考点位置的有效工具。但是不能过于相信未经检验的有限元分析模型 (实际上测试就是校验有限元模型)。

**基本要求:** 几乎任何模态测试的基本要求就是需要你仔细思考测量过程中的每个步骤, 以确保得到正确的FRF。最糟糕的情况就是测试人员不思考他们将要做什么。当我走进实验室看到正在进行的测试, 而测试人员却没有理解正在测试什么时, 我感到非常伤心。很多时候相关人员总是这样回答: “我们总是这样做的, 它肯定是正确的, 因为我们这样做已经很多年了”。按照一组既定的程序进行测量没有错, 但是需要强调的是每位测试人员都应该理解用于获得FRF数据的测试途径与方法背后的逻辑性和理由。首先, 总是要做的是**质疑假设**, 以确保每个人都明白为什么按这种方式行事。其次, 就是我常说的**思想不能任性**! 模态测试不是一门简单的按键选择技术, 不是一门按键选择汉堡包、薯条、苏打水的简单按键技术。在过去25年里, 模态测试已走了很长一段路, 到目前为止, 它仍然不是一个自动化的过程。

我希望这些故事能给你带来笑容, 但还是要确保你不会犯同样的错误。如果你还有模态分析其他问题, 请咨询我。



模态测试采集平均的FRF好，还是采集时域数据然后再处理它好呢？

让我们来探讨它们之间的差异。

倘若采集的都是高质量的数据，那么两种方法都是可接受的，但是采集时域数据更具优势。让我们探讨一下，采集存储这两种数据的一些不同之处。

过去，选择将时域数据存储到硬盘上是不太可能的。典型的做法是，采集到时域数据后立即平均得到FRF数据。当时计算机的内存和硬盘容量通常都非常小，因此必须立即处理时域数据（实际上，早期模态测试很少保存所有的频谱数据，大多数都只保存FRF数据。因为存储设备价格昂贵，所以不得不再三考虑决定保存哪些数据）。

这是过去大多数模态测试典型的操作模式。因为采集到数据后，平均的输入谱、输出谱和互谱，连同FRF和相干便可用于数据检查。这个方法采集到的数据含有直接信息，可确保获得足够的测量。采集到每组测量数据后可用于细察，如果需要，还可进行更多的平均，以获得改善的测量或者确定引起较差的测量的原因是什么。因为采集到了每组测量数据，便可复察每一组数据。如果任何一次测量数据出现问题，通过检查FRF和相干就会有直接的反馈，因为每次获得的测量是足够的。

依赖于某些应用，有时，在测试现场用磁带采集和纪录数据，然后将这些数据拿回实验室进行处理，获得平均的FRF。然而，磁带和相关的磁带纪录设备的使用，有时会引入了一大堆不同的问题，这些可能会降低一些数据的质量。虽然磁带机本身引入了一些问题，但保存时域数据的优势在于可以在完成测试以后对时域数据作进一步的处理。可以再研究采样参数以确定各种信号处理带来的影响，因为有时域数据可用。这就使得测试工程师能更深入地洞察采集到的数据的各个方面。如果只有平均的FRF可用，就不可能进行额外的一些处理。

今天，普遍的做法是直接将采集到的时域数据存储到硬盘上。（这很大程度上是因为大容量的硬盘相当低廉。）先采集到时域数据，待测试完成后再进行处理。毫无疑问，采集时域数据是现今采集到的最有用处的数据。对于时域数据，仍然需要对数据进行一些相同的处理（处理成平均的FRF数据），如图1所示。然而，如果需要进行额外的一些处理，时域数据总是方便可行。如果需要，时域数据还可用于研究其他的信号处理方案。而保存平均的FRF数据是不可能用于这些方面的研究。一旦保存平均的FRF数据，就不太可能进行额外的一些处理，因为没有可用的时域数据。

基于上面的讨论，显然采集时域数据是最有用的。似乎没有理由去采集其他类型的数据，除了时域数据。由时域数据可以得到任何形式的频谱。这样，就可以使用时域数据研究和探寻任何后续的处理。一旦有时域数据可用，随着技术的不断进步，便可按新概念和新的数据处理方法对时域数据进行处理。如果采集到平均的数据，那么即便有新的数据处理方法，也不能对数据进行再处理。

然而，不管进行任何测试，只采集时域数据也是相当危险的。听到这句话可能觉得似乎与上面所讨论的相矛盾。不管何时，采集到的时域数据都没有直接的频谱信息，而频谱信息能够看出数据是否足够。而我们所知道的全部数据也就是存储到硬盘的时域数据。

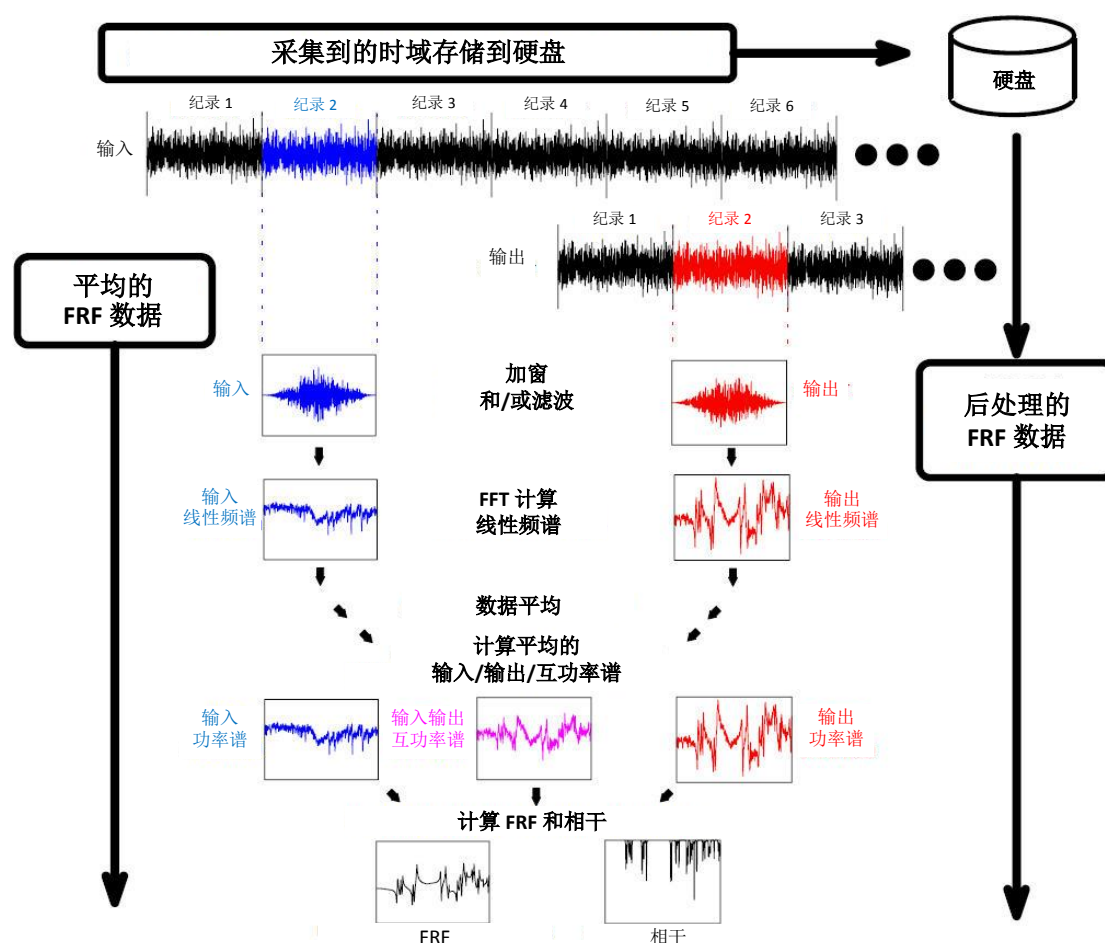


图1 存储时域数据和平均FRF数据的示意图

一旦处理时域数据，得到的FRF质量怎么样？为获得高质量的FRF和可接受的相干函数，采集到的时域数据足够吗？有关采集到的时域数据是否足够，这儿还可以提出了其他一些疑问。在处理时域数据之前，你不知道数据质量怎样。由昂贵的测试现场返回后才发现所有的时域数据都是不可接受的，这时你可能非常憎恨只保存时域数据了。

因此采集数据的原则就是，采集所有你想要的时域数据，在测试现场最好处理一些典型的数据组，以确保采集到的数据是可接受的。必须检查一些FRF和相干！

我希望这些探讨有助于明白保存时域数据和保存平均FRF数据之间的不同。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





为什么校准和模态振型缩放很重要？它们影响重大吗？  
让我们来探讨一下。

校准和模态振型缩放是开发准确的动力学模型两个重要的方面，这样的模型可用于其他方面的结构动力学研究。这些动力学研究包括仿真、预测、动力学修改、相关性检查等方面。虽然这儿给出的几个实例，校准和缩放可能不关键，但我还是推荐这样做，因为这样获得的数据可能是最合适的。我们首先讨论校准，然后再讨论缩放。

整套采集系统的校准是非常重要的。早期的两通道FFT分析仪，很多时候，当需要故障排除或者快速调查测试时，我们可能跳过了校准这一步，因为我们只对输出输入之比感兴趣，因此这个准确的单位可能不关键。这也许还能容忍，因为我们仅对结构的大体振型感兴趣。但是，只要模态数据用于仿真，预测等方面，那么必须使用完全校准过的模型。当动力学模型用于结构动力学其他方面的研究时，精确的校准是必须的。

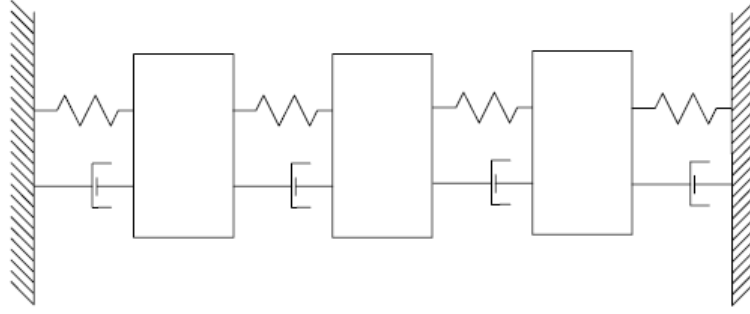
随着多通道FFT分析仪的普通使用，使用的加速度计（可能具有不同的灵敏度）至少需要一些名义的校准值。如果不进行校准，那么结构不同区域的振型可能存在相对偏差，这样在理解模态振型上，可能会引起迷惑。

因此，校准需要做些什么呢？对整个测试链进行完整的校准是最佳的。这需要将一个完整的采集通道作为一个整体单元来校准，包括加速度计、信号调理仪，ADC、导线等一同校准。虽然单独校准每个子块经常也是可接受的，但首选一同校准整个通道测试系统。校准的方法多种多样。可以用一些维护良好的，可溯源的基准加速度计校准其他加速度计，这在实验室里就可以进行，将需要校准的加速度计按背靠背方式安装在基准加速度计上面进行校准。或者通过一些质量已知的块体进行跌落测试校准加速度计。另一个普遍使用的校准方法是利用激励方式，将力传感器安装在带加速度计的质量已知的块体上。这就可以通过使用已知质量的块体的运动方程确保得到力和加速度之比（如果他们当中的一个是已知的，就可以确定另一个）。最精确的校准方法是校准测试过程中要使用的所有采集通道。

虽然许多校准服务公司提供固定频率增量的校准方式（如50, 100, 200, 500, 1000, .....），但这仅仅提供在这些离散频率处的校准信息。更合适的校准方法是在感兴趣的频率范围内执行宽带输入激励校准。

既然校准的模态数据已经讨论过了，那么我们接下来讨论模态振型缩放。我们知道振型是各个测点之间的相对运动，但需要保持一定的缩放比例。也就是模态质量、模态阻尼和模态刚度之间的相互关系。振型可是任何形状，但振型与物理量之间的关系却非常重要。振型可以任意缩放成你想要的样子，但最普遍的缩放方式是单位模态质量缩放（也有其他形式的缩放，如单位长度、振型最大值等于1也很普通）。最重要的是振型可以缩放到一定量，这可用作进一步的参考。缩放是进一步使用动力学模型用于仿真、预测、相关性检查等的关键步骤。

为了说明振型缩放，考虑一个简单的3自由度系统。系统的运动方程和指定的系统各物理量为：



$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{F}(t)\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_1 \\ \ddot{\mathbf{x}}_2 \\ \ddot{\mathbf{x}}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 & \\ -0.1 & 0.2 & -0.1 \\ & -0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 20000 & -10000 & \\ -10000 & 20000 & -1000 \\ & -10000 & 20000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{Bmatrix}$$

相应的特征值求解方程：

$$[[\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]]\{\mathbf{X}\} = \{0\}$$

$$[\mathbf{\Omega}^2] = \begin{bmatrix} 5858 & & \\ & 20000 & \\ & & 34142 \end{bmatrix}; [\mathbf{U}] = [\{\mathbf{u}_1\} \ \{\mathbf{u}_2\} \ \{\mathbf{u}_3\}] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.500 \\ 0.707 \\ 0.500 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0 \\ -0.707 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -0.500 \\ 0.707 \\ -0.500 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

现在仅用系统的第1阶模态来说明缩放。第1阶模态的频率为12.18Hz，阻尼为0.038%和复数极点为 $-0.029 \pm j76.537$ 弧度/秒。

现在回想一下描述FRF的极点和留数。对于第1阶模态，为

$$\mathbf{h}(j\omega) = \mathbf{h}(s)|_{s=j\omega} = \frac{\mathbf{a}_1}{(j\omega - \mathbf{p}_1)} + \frac{\mathbf{a}_1^*}{(j\omega - \mathbf{p}_1^*)}$$

我们知道留数直接与系统模态振型相关

$$[\mathbf{A}(s)]_k = \mathbf{q}_k \{\mathbf{u}_k\} \{\mathbf{u}_k\}^T$$

其展开式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11k} & \mathbf{a}_{12k} & \mathbf{a}_{13k} & \cdots \\ \mathbf{a}_{21k} & \mathbf{a}_{22k} & \mathbf{a}_{23k} & \cdots \\ \mathbf{a}_{31k} & \mathbf{a}_{32k} & \mathbf{a}_{33k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \mathbf{q}_k \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{1k}\mathbf{u}_{1k} & \mathbf{u}_{1k}\mathbf{u}_{2k} & \mathbf{u}_{1k}\mathbf{u}_{3k} & \cdots \\ \mathbf{u}_{2k}\mathbf{u}_{1k} & \mathbf{u}_{2k}\mathbf{u}_{2k} & \mathbf{u}_{2k}\mathbf{u}_{3k} & \cdots \\ \mathbf{u}_{3k}\mathbf{u}_{1k} & \mathbf{u}_{3k}\mathbf{u}_{2k} & \mathbf{u}_{3k}\mathbf{u}_{3k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

在这个方程中，比例常数‘q’是非常重要的一项。虽然缩放有许多不同类型，但最常用的一个是单位模态质量缩放（在有限元建模分析软件中，也常用单位模态质量进行缩放）。采用这种方式，系统的模态参数：模态质量、模态阻尼和模态刚度分别定义为：

$$\text{模态质量} \quad \bar{\mathbf{m}}_k = \frac{1}{\mathbf{q}_k \bar{\omega}_k}$$

$$\text{模态阻尼} \quad \bar{\mathbf{c}}_k = 2\sigma_k \bar{\mathbf{m}}_k$$

$$\text{模态刚度} \quad \bar{\mathbf{k}}_k = (\sigma_k^2 + \bar{\omega}_k^2) \bar{\mathbf{m}}_k$$

现在如果我们考虑展开式中的第一列，那么留数通过下式与振型直接相关

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{11k} \\ \mathbf{a}_{21k} \\ \mathbf{a}_{31k} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{q}_k \mathbf{u}_{1k} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{1k} \\ \mathbf{u}_{2k} \\ \mathbf{u}_{3k} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

注意到方程中有一个重要的参数：比例因子‘q’，这个比例常数使得模态振型与系统模态质量、模态阻尼和模态刚度之间保持合理的缩放关系。注意，如果我们进行一次测量，如测量  $\mathbf{h}_{31}$ ，那么  $\mathbf{a}_{31} = \mathbf{q} \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_1$ （也可以测量  $\mathbf{h}_{21}$ ，那么  $\mathbf{a}_{21} = \mathbf{q} \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_1$  等等）。对于这样的每个关系式，都有一个留数提取值（由曲线拟合过程得到），但有两个模态振型值。因此，可以说明模态振型是不同测点之间的‘相对运动’。使用留数表示的相对运动以动画形式体现，含有丰富的相关信息。然而，如果考虑驱动点测量，那么看到方程中的  $\mathbf{h}_{11}$  提供  $\mathbf{a}_{11} = \mathbf{q} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1$ ，因而可以用这个方程求解  $\mathbf{u}_1$ ，然后又用  $\mathbf{u}_1$  缩放这一列中所有其他的测量项。

我常常听到一些人说没有必要缩放模态振型和没有必要进行驱动点测量。虽然仅为了动画模态振型，这是成立的，但是不进行任何缩放的模态数据不能进一步用于其他分析处理。为了进一步的研究，如结构动力学修改、强迫响应、预测、仿真和相关性检查等等，模态振型缩放是必须的。

因为本实例中的模态是实模态，留数是复数值，但是它是纯虚数。为了简化这些数字，留数通过  $\mathbf{r} = 2\mathbf{j}\mathbf{a}$ （注意在许多商业模态分析软件中，这是留数常见的表达）转换成实数表达。本例中第1阶模态的留数‘r’的值为

$$\mathbf{dof1} = (0.003266 \pm \mathbf{j}0.0)$$

$$\mathbf{dof2} = (0.004619 \pm \mathbf{j}0.0)$$

$$\mathbf{dof3} = (0.003266 \pm \mathbf{j}0.0)$$

留数与模态振型的相互关系，通过比例因子相联系

$$\begin{Bmatrix} 0.32664\mathbf{E}-2 \\ 0.46194\mathbf{E}-2 \\ 0.32664\mathbf{E}-2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{11} \\ \mathbf{r}_{21} \\ \mathbf{r}_{31} \end{Bmatrix}^{(1)} = \mathbf{q}_1 \mathbf{u}_1 \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{Bmatrix}^{(1)} = \frac{1}{76.537} (0.500) \begin{Bmatrix} 0.500 \\ 0.707 \\ 0.500 \end{Bmatrix}$$

因此，可以看出模态振型存在明确的缩放关系，为了完成振型缩放必须通过驱动点测量实现。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



真的有必要拒绝连击吗？它们真的是个问题？  
让我们来探讨一下。

我知道许多人都说连击是完全不可接受的。锤击法采集模态数据时，连击不是数据采集的最佳时机。然而，在某些特定情况下，接受连击测量又可能是合理的。让我们讨论出现连击时，可能引起的问题，并且说明怎样确定连击产生的测量是否可接受。

首先，我要声明的是我愿意不惜任何代价避免连击。连击是不希望发生的，但有时又是不可避免的。本质上需要关心的是频率响应测量的充足性，这才是真正的决定性因素。最近，我参与了一次模态测试，测量过程中存在连击。参与测试的工程师相当严格，只要有连击，测量就不可接受。（实际上，这位工程师引用了模态测试专家的做法）。当问为什么连击不可接受时，他立即迅速作出评论：任何优秀的测试工程师都知道连击是不可接受的！这是个不错的忠告，但是，实际上他完全不明白这类测量情况的限制因素是什么，他只知道不能接受连击测量。当然，如果通过相干和差劲的输入力谱明显判断测量较差，那么有充分的理由可以认为连击测量不可接受。

不幸的是，因为连击是个问题，工程师精心选择了一个测量位置以避免连击，但是却产生了一次极其差的测量。这样测量得到的FRF比连击测量产生的更差。为了说明这些观点，让我们考虑一些已获得的测量，当面临这样有问题的测量情况时，用于说明其中一些问题、不足之处和注意事项。

处于测试下的真实结构没有给出，图1为该系统的简单示意图。悬臂的平板类似结构测试过程中响应迅速，易于产生连击。考虑两个测量位置：连击容易出现的悬臂自由端和连击可以避免的悬臂固定端附近（注意在所有的频谱图中，用动态范围比例为1: 100dB 描述输入谱和频响函数，图中顶部为0~1范围内的相干）。

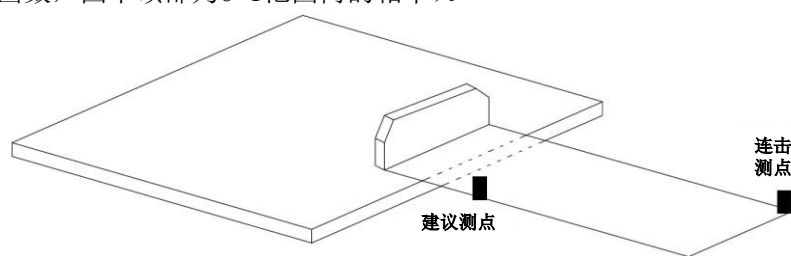


图1 结构上的不同测量位置

测试工程师想避免“连击位置”，因而确定了一个“建议测点”，此位置毫无疑问不会发生连击。图2给出了“建议测点”位置的测量数据（脉冲域历程、输入力谱、频响函数和相干）。

首先从图中可以看出到力脉冲和力谱似乎相当好。力脉冲仅包含一个脉冲，相应的力谱在整个频带上也相当平坦，幅值在整个频带上衰减小于10dB。

在同一个图中给出了相应的频响函数和相干曲线。通过相干在多个频率处较差可以明显证明频响函数不是特别理想。注意到相干在低频段很差，似乎在在低频段有两个共振峰没能

有效地激起，并且测量过程中似乎存在噪声。

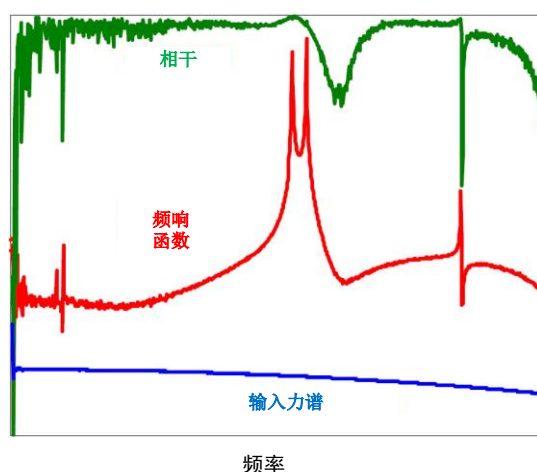


图2 无连击测量

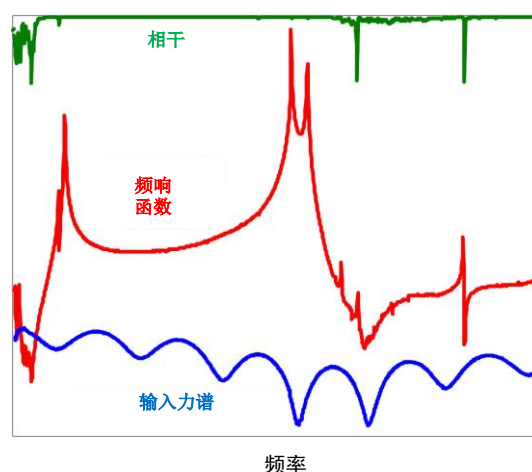


图3 连击测量

显然，这是无连击的测量，但是就测量的充足性而论，在我看来，是非常差的，大多数人可能都同意这一点：此次频响测量欠佳。事实上，测试工程师试图为这次不理想的测量作辩解，声称结构非常复杂，有许多连接点，可能具有非线性行为（我多么希望每次听到这样的声明就可得到1美元！每次都是指责非线性、连接点和阻尼！）。

现在考虑连击测量，实际上，测试过程中观测到多次连击。注意到此次测量，输入的激励中清楚地存在多次锤击，力谱也不平坦，在整个频谱图上存在多次振荡，实际振荡变化幅度位于20~25dB之间。当然，我同意那种观点，就是要避免连击测量，但是此次连击测量的频响和相干确实相当理想。

此次测量的频响函数相当好，并且峰值明显，特别是在低频段（先前低频段的峰值不明显，并且受到了噪声干扰）。甚至在高频段还出现了另外两个峰，而在先前的测量中没有观测到。事实上，如果我不给出连击测量的所有数据，仅显示频响函数和相干，太多人会毫无疑问地接受此次测量（同样，对于先前的测量，如果仅给出频响函数和相干，那么可能也不会认为测量是可接受的）。

因此，我们到底需要关心什么呢？如果力谱在任何特定频率处有显著衰减，那么测量可能不充分。在作出任何评判之前，需要检查和评估力谱、频响函数和相干。不要盲目地下结论，说连击测量不可接受。

我同意我们应该不惜任何代价去避免连击，但是我们必须认识到连击本身不一定就是个问题，如果力谱、频响函数和相干都可接受的话。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



有人告诉我，辨别伪重根必须有多个参考点。  
让我们来探讨一下。

首先，我想说的是，重根在大多数测试结构中还是很少见的。但是最近，我碰到了多个测试，都涉及到“伪重根”。伪重根模态是指在测量数据的一个频率分辨率内存在两个或多个频率。因此，频响函数中观察到的峰值是由两阶或多阶模态之和组成的。

为了像单个频率峰值一样清晰区分这些伪重根峰值，需要更高的频率分辨率。当然，这并不一定切实可行。很多时候，为了获得高的频率分辨率，要求采集时间相当长的时域数据块，但这并不容易做到。但是如果频率分辨率不足，会出现什么情况呢？通常，大多数人会认为，如果存在多个重根，那么必须使用多参考点，否则不能提取到重根。这是个非常强硬的观点，但是我未必同意。模态参数估计算法（曲线拟合）功能强大，提取伪重根（将给两个实例）时，没有理由认为该算法不完善，存在缺陷。这些情况下，事实上没有必要总是考虑多参考点。

首先，我要确保这不是误导。进行实验模态测试时，我完全同意提倡采集多参考点数据。随着多通道采集系统的普及，很容易获得多参考点数据。对于4或8通道的数据采集系统，锤击法测试时，通常可以放置多个加速度计在不同的测量位置作为参考点（MRIT—多参考点锤击法测试）。那么所有测量位置的锤击测试数据能通过多个固定不动位置的加速度计采集得到。（当然，对于单个激振器模态测试，如果没有多个激振器可用，那么采集多参考点数据，工作量会大些，但是仍可以采集到多参考点数据）。但问题的实质在于：提取重根必须使用多参考点数据吗？

在我看来，答案是：这不是必须的。如果采集到的数据质量高，那么频响函数是所有模态之和，模态参数估计算法能从测量数据中准确地提取到多个重根。考虑两个结构，给出这些测量数据的多个重根（一个频率分辨率内存在两个截然不同的模态）提取结果。在这两种情况中，通过模态指示工具（SUM、MIF等等）似乎表明只存在一个根。其中一个结构，频响函数超过100个，只有少数几个十字交叉方向的FRF表明有两个频率。另外一个结构，没有一个FRF揭示FRF的前两个峰值包含多个重根。

第一个结构是机翼结构的组合翼梁原型样板。其几何结构为逐渐变细的梁（I型），不具有几何对称性。图1给出了锤击测量得到的FRF和结构照片。

测量相当好，尽管在频率范围内存在一些噪声。采用频域的多项式曲线拟合算法提取模态振型。（实际上，用三个不同的商业模态软件提取到的结果相同）。频响函数的第二个峰实际上包含了两个截然不同的根。曲线拟合算法提取第二个峰值处的两个重根没有任何困难，即使看起来只有一个峰。图2清楚地给出了这两个频率下的模态振型。即使只用了一个参考点的数据，仍然成功地提取到这两阶模态。

第二个结构是一块镁质的振动台滑动板。由几何结构看不出存在任何重根。图3给出了典型的锤击测量得到的FRF和结构照片。

在得到的所有FRF中，第一个峰值处似乎只有一阶模态，在一定程度上，第二个峰值处



同样似乎也只有一阶模态。模态指示工具也指明那里只有一阶模态。然而，估计参数时，假设只有一阶模态存在，却没有提取到“预期的”模态振型。经过再次的曲线拟合，用每个峰有两阶模态重新拟合数据，就显示出了预期的模态振型，如图4所示。

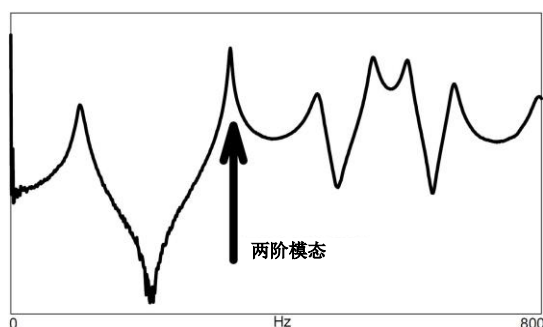


图1 典型的FRF和结构照片

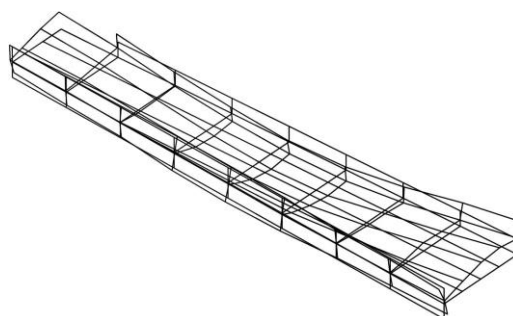
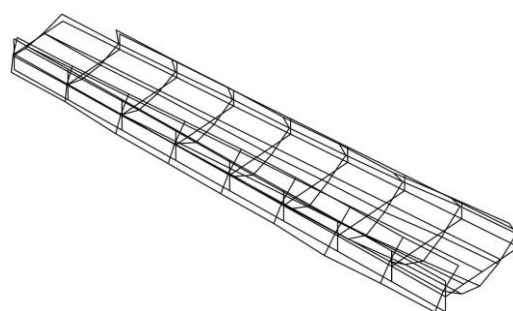


图2 第2个峰值处的伪重根模态

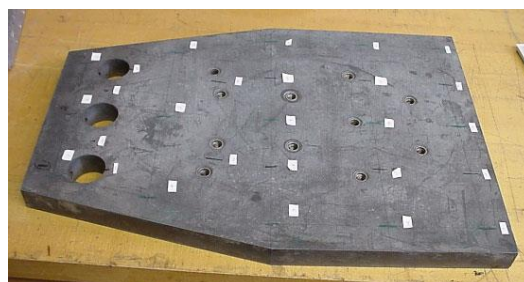
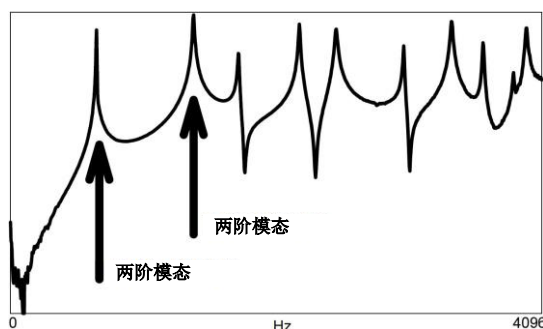


图3 典型的FRF和结构照片

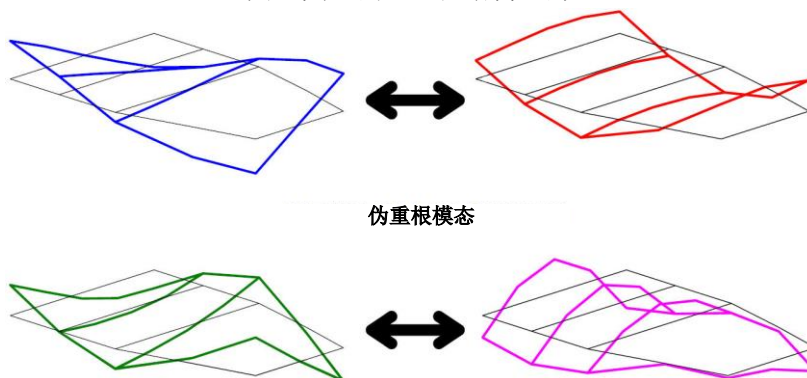


图4 伪重根模态振型

这两个例子中，模态指示工具都没有明确指出存在重根。为了提取到多个重根，需要用户的干预。同时注意到使用单参考点数据成功地提取到了重根，多参考点不是必须的！但是请明白，多参考点数据是极其有用的，但为了提取多个伪重根，多参考点数据不总是必要的。

我希望这些能解答你的疑问。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



对结构部分关心部位做模态测试，发现许多相同的振型。我做错了什么吗？  
让我们来探讨一下。

这是实验模态测试过程中经常会遇到的另一个普遍性问题。很多时候，你个人或公司只关心结构的一部分或者系统部分部件。因此，你只集中关注整个结构的那一部分，因为这个区域才是你负责的或关心的区域。这似乎是合理的，特别是你不想测试整个系统时。（呵呵，如果生活就是这么简单和容易，该多好呀！）。

不幸的是，很多时候这可能不行。在系统不同组件之间或者不同部位之间，经常存在显著的动力学耦合，不可能只测试你关心的那部分结构就总能满足要求。当然，你确实可以只测量关心的那部分结构，但是很多时候，系统的不同部件或子系统之间存在着显著的动力学相互作用。如果实验模态测试只采集结构关心部分的数据，那么得出的模态振型会让人感到迷惑，因为整个结构的模态振型是未知的。这如同把结构的其他部分遮盖起来，只让你看关心的那部分一样，这样会使用户相当迷惑。很多时候人们对这类测试的评论是：两个第一阶弯曲模态或者两个第一阶扭转模态，等等。显然这是完全不可能的！系统不可能存在两个第一阶模态。但是从你的限制条件看，只测试结构的一部分，确实出现了好像两阶非常相似的模态。

最近，我见过对一个框架类型的结构进行模态测试，在结构的不同高度上有不同的平台。对其中一个平台表面进行实验模态测试，因为一些重要的设备要安装在这个特定的平台上。因为仅采集了那个特定平台的数据，所以似乎结构具有多阶相似（几乎严格相同）的模态。问题显然在于，只识别了整体模态振型的一部分，没有提供完整的整体模态振型。

作为这个问题的一个实例，考虑中间用多根圆柱支撑的两层平板结构，用于说明实验模态分析典型的FRF和相应的模态振型。一种情况是只测量上层平板；另一种情况是两层都测量（只考虑垂直方向的运动，以简化这个问题的解释说明）。上平板典型的驱动点FRF和其他一些典型的跨点FRF，如图1所示。

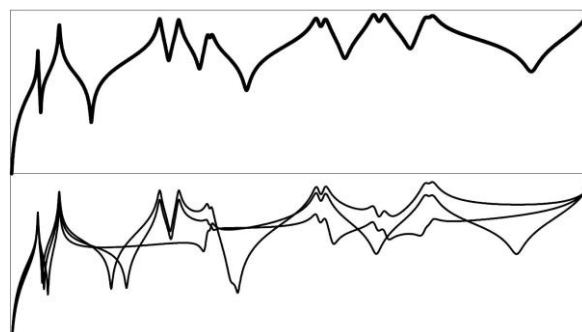


图1 驱动点FRF和典型的跨点FRF

仅提取上平板的数据（只分析结构上平板的数据），FRF的前四个峰的实验模态振型显示出了两阶非常相似的扭转模态和两阶非常相似的弯曲模态。图2给出了这四阶振型。显然，这是不可能的，但是由于只测量了结构的一部分，FRF数目有限，这又完全可能。

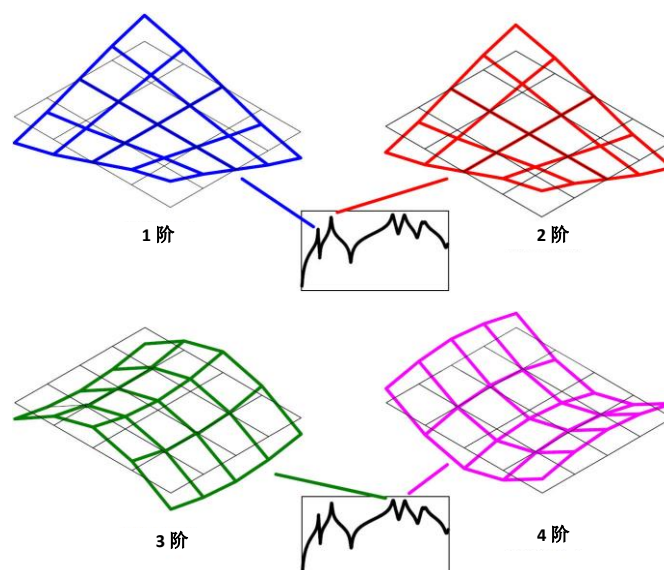


图2 上平板的模态振型

为了更好地明白结构‘实际的’模态振型，考虑更多数目的测点用于描述FRF矩阵。用这些FRF去确定整个结构的模态振型，图3给出了FRF前两个峰值所对应的整个结构的模态振型。显然，采用更多的测点清楚地阐明了结构上平板与下平板的实际模态振型关系。当只对整个结构或系统的一少部分进行模态测试时，这种现象经常出现。

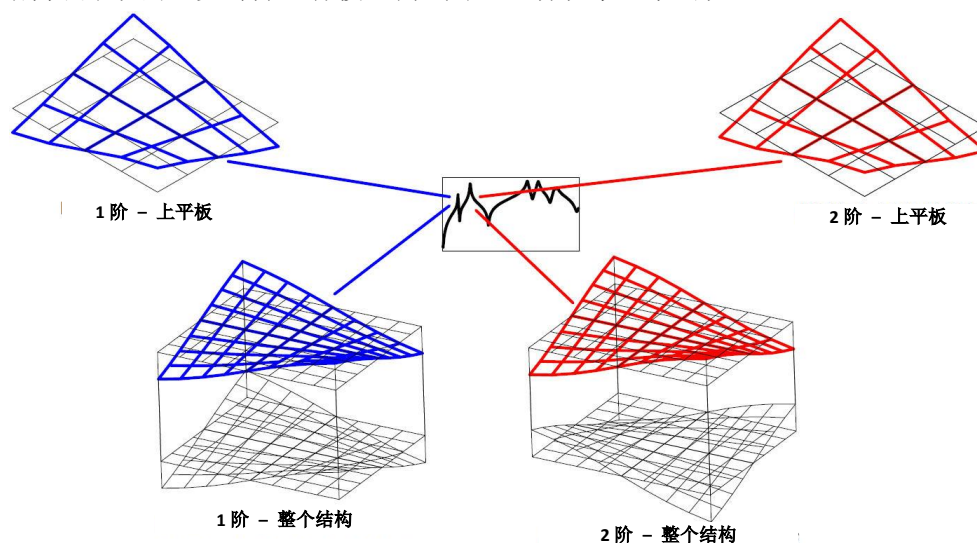


图3 上平板和整个结构的前两阶模型振型

这个简单的实例清楚地表明必须得到整个系统的模态振型，否则可能存在一些令人迷惑的模态振型。然而，当被测结构相当复杂，而又不可能对整个结构进行模态测试时，这种现象也经常出现。这种现象也可能出现在系统内部组件不容易接触到的测试中。这些内部组件可能有显著的结构或系统的1阶或多阶模态能量。在这些情况中，只能获得部分结构的模态振型，因为没有办法进入结构内部。设想一下前面的两层平板结构，如果下层平板不可见，或者被一些外层遮盖物所覆盖，那么就不可能对下层平板进行测量，测量结果也只揭示上平板这一部分的模态振型。在这种情况下，相同的问题又出现了。

模态测试时，结构的所有重要部分，测试设备不可安装，或者必须拆卸才能进入相关区域时，那么上述现象就可能出现。在这些情况中，存在相同的问题。因此，当被测结构内部组件或者子系统无法进行测试，而这部分区域又包含用于识别系统模态特征的关键信息时，就必须特别小心。我希望这些能解答你的疑问。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



为什么一些FRF存在反共振峰，而其他的又没有呢？  
让我们来探讨一下。

这是个不错的问题，你说的完全正确，一些FRF存在反共振峰，而其他的又没有。但是为什么会出现这样的现象呢？让我们首先讨论一个特定的测量，称为驱动点（也称为原点）测量的一些属性，然后扩展这个讨论，解释在怎样的条件下，反共振峰会出现在FRF中。

首先解释驱动点测量。驱动点测量是指输入力和输出响应在同一点、同一个方向进行的频响函数测量。典型的驱动点测量如图1所示。

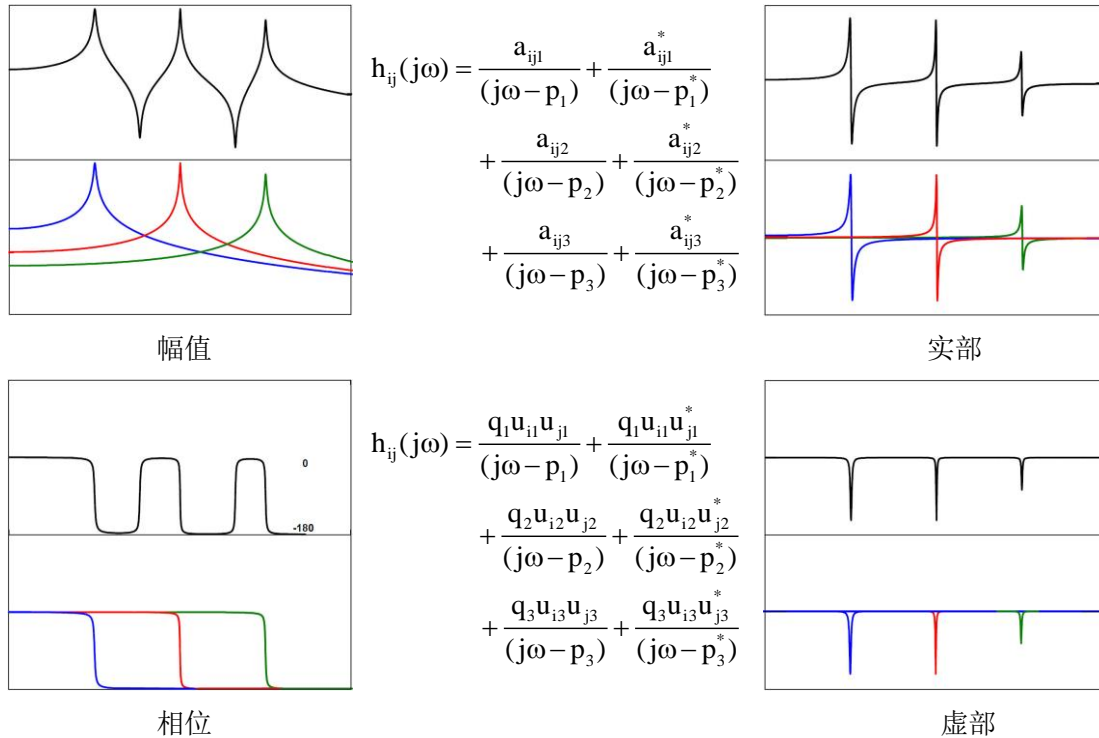


图1 驱动点FRF（幅值与相位、实部与虚部）

驱动点测量具有一些重要的特征：

- 幅值曲线中共振峰和反共振峰交替出现；
- 每经过一个共振峰时相位滞后 180 度，每经过一个反共振峰时相位超前 180 度；
- 频响函数虚部的所有峰值方向相同。

驱动点 FRF 可以看成是所有模态的叠加或者是每阶模态引起的贡献。图 1 显示的四个图中，每幅图上边的曲线图为所有模态的叠加，下面的曲线图为每阶模态的贡献。对于图示的前三阶模态，频响函数由描述每阶模态的单自由度振子叠加组成。我们知道频响函数方程可以由留数或者模态振型来表示，如图 1 中公式所示。



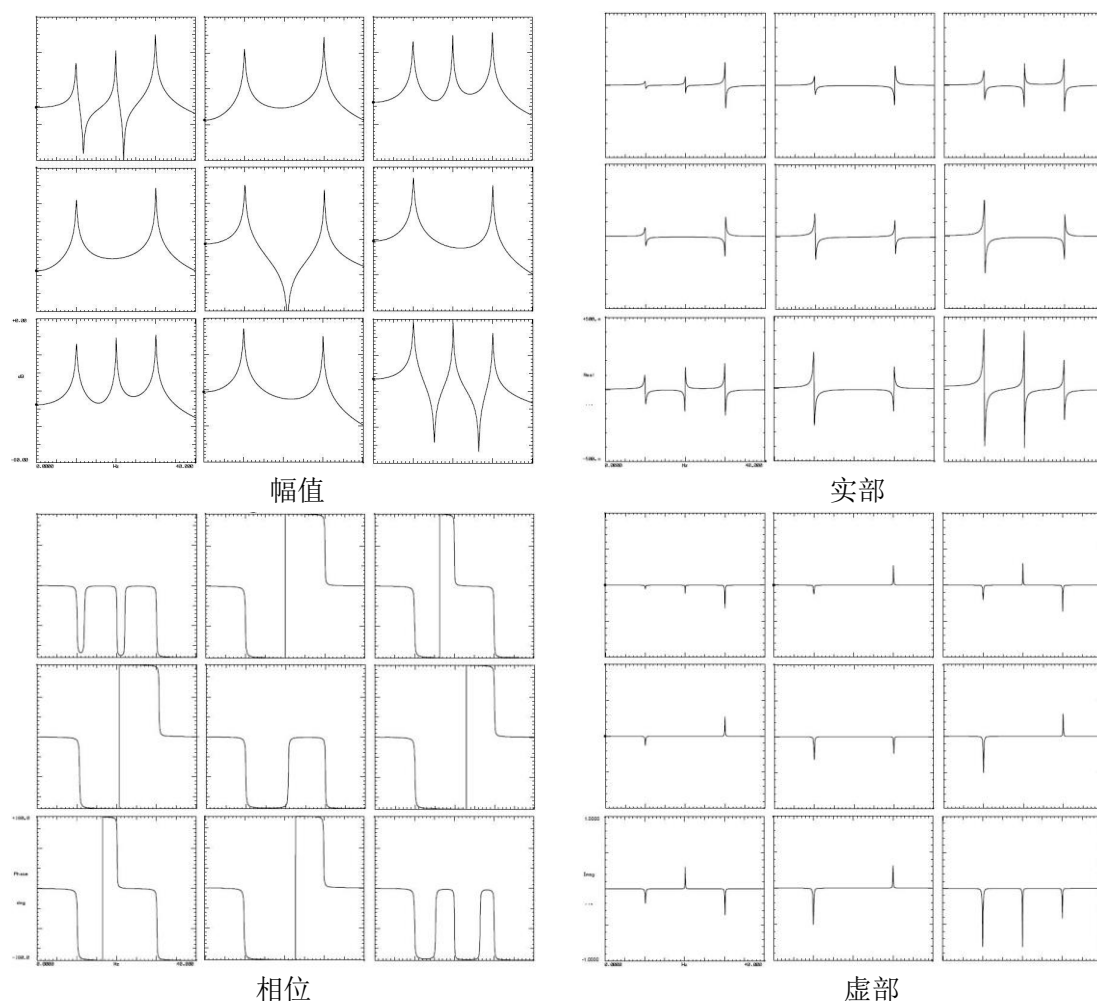


图 2.3 自由度系统的 FRF 矩阵

现在已经明白了驱动点测量，接下来讨论其他一些项。例如，驱动点 FRF 的虚部各峰具有相同的方向；驱动点 FRF 幅值图中，各阶模态之间存在反共振峰。这是因为 1 阶模态和 2 阶模态在反共振频率处幅值相等。在这个反共振频率处，虽然幅值大小相等，但是彼此的相位却相差 180 度。这就意味着 1 阶模态和 2 阶模态的幅值大小是相等的，但是二者是反向的。因此频响函数趋向于零（当然这还有其他阶模态的贡献，但是通常离得越远，其贡献量也就越小）。

这暗示着当各阶模态的虚部符号相反时，相位未必反向，因而模态叠加时，反共振峰不会出现。因此，每条 FRF 中出现反共振峰或者不出现反共振峰（无反共振峰时，FRF 的形状为马鞍状）取决于频响函数虚部的方向。当频响函数相邻两阶模态的虚部同方向时，那么在这两阶模态之间出现反共振峰；当频响函数相邻两阶模态的虚部符号相反或方向相反时，那么在这两阶模态之间不会出现反共振峰，这时频响函数的形状为马鞍状。

事实上，频响函数虚部的方向（或者符号）直接与系统的模态振型相关。由图 1 可以看出，频响函数可以用留数来表示，留数又可以用系统模态振型表示。当用模态振型表示时，留数的方向符号就清楚表明了系统的模态振型结果。图 2 显示为一个简单的 3 自由度系统的 FRF。细查 FRF 的每个部分（幅值与相位、实部与虚部），就能更好地理解频响函数中的相位关系，反共振峰和马鞍状的出现。

我希望这些解释能解答你的疑问。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



局部拟合和整体拟合有何不同之处？

让我们来探讨一下。

这是个相当不错的问题，为了说明这个问题，需要涉及到少数几个核心方程和一个简单实例，用于说明它们之间的差异。让我们回想一下频响函数

$$\mathbf{h}_{ij}(\mathbf{j}\omega) = \sum_{k=1}^m \left( \frac{\mathbf{a}_{ijk}}{(\mathbf{j}\omega - \mathbf{p}_k)} + \frac{\mathbf{a}_{ijk}^*}{(\mathbf{j}\omega - \mathbf{p}_k^*)} \right)$$

这有许多个‘ij’（输出-输入）组合，用一个可能的 FRF 矩阵加以说明，如图 1 所示。

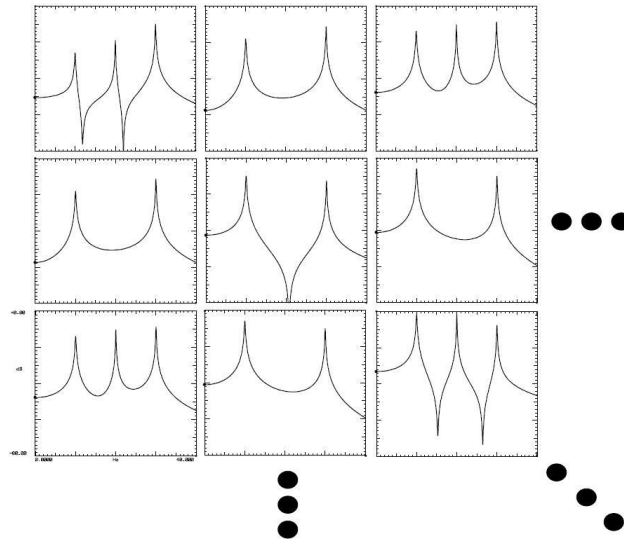


图 1 多自由度系统的 FRF 矩阵

每个 FRF 由极点和留数定义，由一个测点到下一个测点测量得到的 FRF 是不同的，因为留数不同。这是正确的，因为模态振型与留数相关

$$\mathbf{a}_{ijk} = \mathbf{q}_k \mathbf{u}_{ik} \mathbf{u}_{jk}$$

但是需要着重注意，FRF 的分母是个常数，测量不同测点时不会改变。因为系统极点不随每个测量位置的改变而改变，那么这说明系统极点是系统的一个“整体”特性。这意味着从一次测量到下一次测量，留数会发生改变，如预期一样，但是极点不会改变，至少理论上是成立的。但是现实测量中，未必是这样的。现实测量时系统极点可能会移动，这会引起问题。

为了理解这一点，考虑用直线进行数据拟合，如图 2 所示。如果选择不同的两组数据：一组两个点（蓝色）与另一组两个点（红色），两组数据计算出来的斜率和 y 方向的截距显著不同。换句话说，斜率和 y 方向的截距都有差异，数据不一致，这依赖于提取参数所使用的数据。使用最小二乘法拟合所有的数据是斜率和 y 方向截距的“最优”估计。



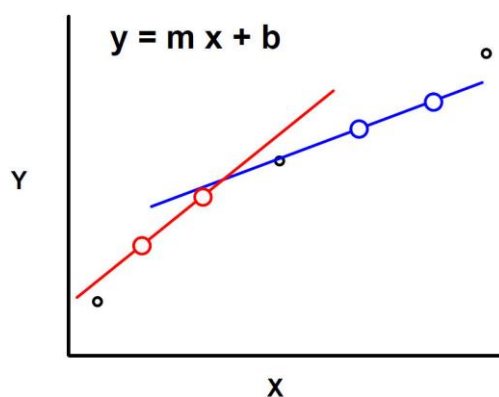


图 2 说明参数的变化

如果独立估计每个 FRF，那么由测量得到的 FRF 提取模态参数时，也存在与上面相同的影响。依赖于使用的 FRF，估计的极点可能存在差别，虽然理论上表明这是不会发生的。然而，用实测的 FRF 提取模态参数，且单独考虑每个 FRF 时，那么的确会出现极点发生移动的情况。这个过程称为“局部”拟合。为了规避这个问题，同时使用所有的 FRF 作为一组数据，采用最小二乘法找到最佳极点，描述极点的“整体”表达。一旦估计出系统极点，接下来在模态参数估计方程中使用极点的“整体”估计去估算留数。这个过程共有两个步骤，首先估计系统的“整体”极点，接下来使用先前估计的系统“整体”极点估计留数，此时的极点已锁定为一个固定值，不管每个 FRF 可能的指示值。这就是“整体”拟合。

为了说明局部拟合和整体拟合的不同之处，使用一个简单的平面框架结构的 FRF 加以说明。图 3 为这个结构的一些 FRF。在显示的带宽内有五阶截然不同的模态。注意到最上面两个 FRF 图显示出了框架五阶模态的峰值，但是下面两个 FRF 图并没有全部显示出五个峰值（这是因为一些测量位于一些模态的节点上）。

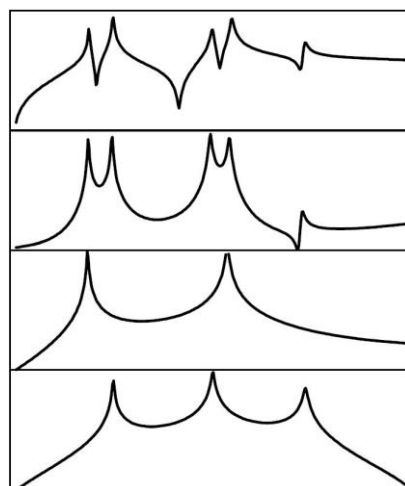


图 3 平板结构的一些 FRF

如果在某条 FRF 曲线中没有峰值，那么怎么估计系统极点？这将会引起严重的问题，特别是采用局部拟合的时候。如果对此类数据采用局部拟合，对每个 FRF 采用局部拟合，那么提取得到的模态参数将包含较差的提取值，这是因为极点估计较差。使用局部拟合技术估计平面框架结构的模态参数，模态振型如图 4 所示。

注意到模态振型中的一些位置，似乎数据不连续，与预期的模态振型不同。这时的模态振型是失真的。原来是这些位置是结构模态的节点位置（这是局部拟合的常见问题）。

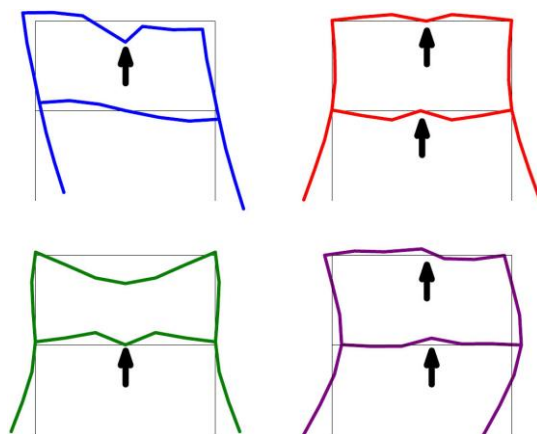


图 4 局部拟合得到失真的振型

对同一组 FRF 数据采用整体拟合。首先估计系统最合适的整体极点，然后立刻用整体极点估计留数。图 5 为该方法得出的模态振型。注意到此时平面框架结构的这些模态振型才是预期想得到的模态振型。

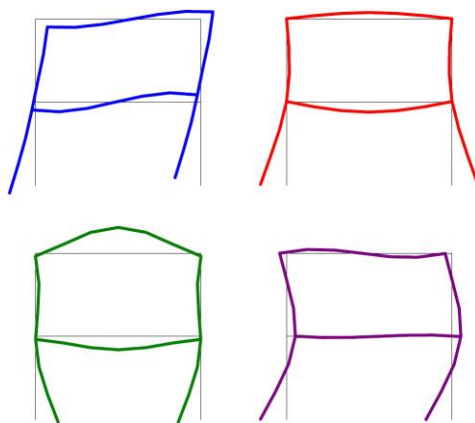


图 5 整体拟合得到正确的振型

这个实例清楚地表明整体拟合产生更优的结果。然而，当采集数据时，必须不断的尝试，以确保数据满足整体拟合的条件：在所有测量得到的 FRF 中，模态必须是整体的！如果数据不一致，那么在参数估计过程中可能会产生误差。需要不断的尝试以保证采集到的 FRF 数据满足整体特性。

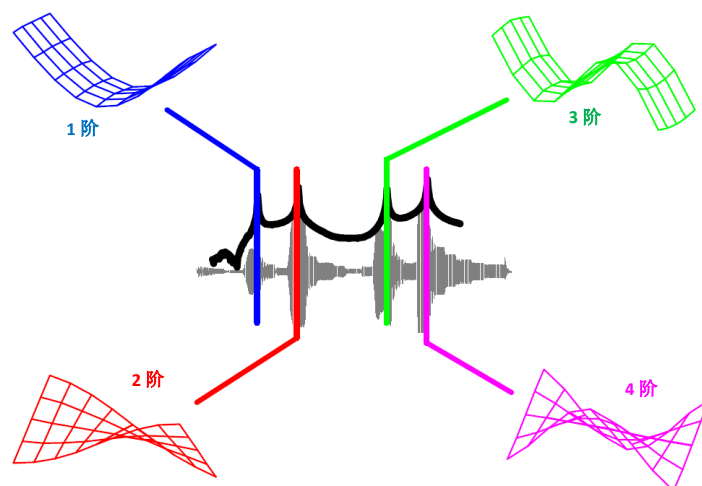
我希望这些能消除你的疑惑。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



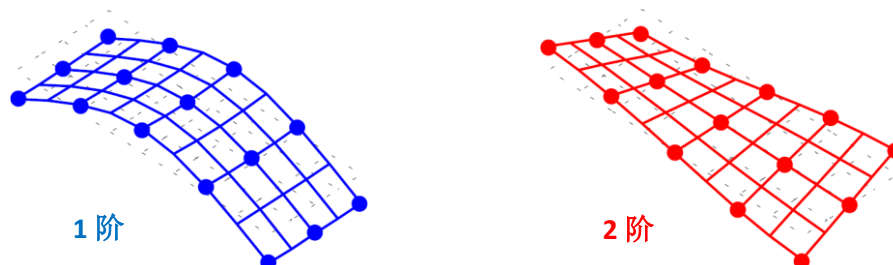
我们之前谈论过模态测试所需的测点数目。但有人告诉我不需要完全定义整个振型。让我们讨论这个，并作进一步的解释。

之前我们已讨论过实验模态测试时的测点总数直接与充分描述模态振型相关。但为了定义一个合适的动力学模型，要求又有所不同。我首先重申一下早期确定的测点数目与模态振型定义有关，而接下来确定的测点数目与定义一个合适的动力学模型有关。

我们还是沿用早期多次讨论用过的简单平板结构。对于这个平板，有许多可能的测量位置用于描述这个结构的动力学特征。如果进行的实验模态分析要与有限元模型进行相关性验证，那么必须要有合适数目的，空间上良好分布的测量自由度，以便与有限元模型相比较。这对于可视化振型也很重要。



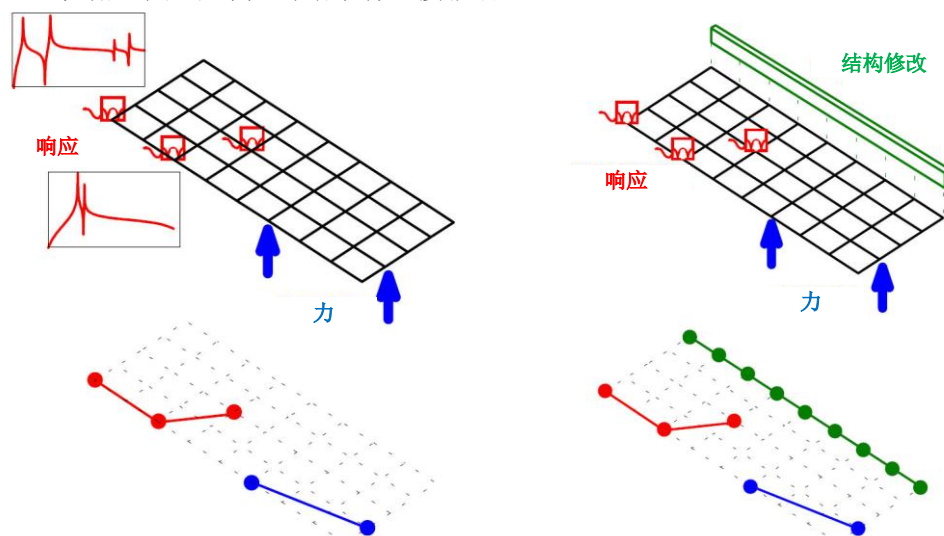
因此，我们考虑 45 个节点和 32 个平面单元的有限元模型，同时考虑 15 个测点均匀分布的实验模态测试。比较有限元模型和实验模态测试，自由-自由边界平板的前两阶弹性模态振型。



对于这次比较，由有限元模型和实验模态模型的相关性可以看出，有足够分布的测点数目，能唯一定义结构的模态振型。如果使用模态置信准则（MAC）和伪正交检查（POC）作有限元模型与实验模型的相关性检查，那么这有足够的信息进行有效的分析。然而，响应模型可能不需要相同分布的测点。

考虑力作用在结构上两个不同的位置，仅测量三个关键位置处的响应。左下图中用蓝色表示输入力，红色表示测量响应。

点对点的频响函数描述了由单位正弦力输入引起的特征输出响应。这由结构上特定的输入-输出测量计算得到。特定的频响测量跟结构上其他点的 FRF 没有关系。如果只关心某一个频响函数，那么无论是测量两个，还是三个甚至 100 个 FRF 都没有关系，特定输入-输出位置的单个频响函数不会因为测点数目的增加而变好或变差（在有限元方法中，这个是不成立的，通常增加节点和单元对结果有直接影响）。



如果唯一的要求是确定外力作用下系统的动力学响应，那么实验模态模型只需要只需要这几个点，即图中三个红色响应测量点和两个蓝色力作用点。这些测点能充分描述系统在这些点的响应。当然，显示的这些点不能充分描述结构变形，不能充分确定载荷分布到整个系统上时结构是怎样变形的，但是这些有限数目的测点，定义动力学模型是充分的。

现在继续考虑前面平板系统，但需要对结构进行修改。右上图描述了添加加强筋，修改后的结构。为了进行这些动力学修改，一组与结构修改处的所有自由度相关的测点是需要的，如图中绿色表示的测点。

因此这两个模型表明，描述不同的模型需要完全不同数目的测量自由度。对于响应模型和结构动力学修改模型，为了开发合适的动力学模型用于描述系统，就需要明显不同数目的测量自由度。因此，必要的测点数目可以表述如下。为了获得一个合适的动力学模型，这些测点必须能描述：

1. 作用在系统上的所有外力的自由度；
2. 需要测量的所有响应的自由度；
3. 考虑结构动力修改的所有自由度。

模型中包含任何其他额外的自由度的作用，仅仅是让你看起来比较愉悦而已！实验模态测试包含的测点更多能更好地可视化系统的特征振型（或者用于确定与有限元模型的相关性，如果这是测试目的的话）。最少数目的测量自由度数是以开发一个合适的动力学模型为前提。

现在我希望你对一次模态测试需要多少个测点有更深入的理解，测点数目的变化依赖于动力学模型的最终用途。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



模态测试需要将参考加速度计安装在 X, Y 和 Z 方向吗？

很好，让我们来探讨这个。

这个方面经常使许多人感到困惑。一些预想的观念是，为了获得模态数据，必须在坐标系三个主方向上安装加速度计。答案是，这不是必须的，但是在一些测试中，可能强烈建议这样做，甚至必须这样做。但是，很多时候人们认为你得不到三维模态振型，除非你在三个方向都安装了加速度计。

用于参数估计的基本方程可以写成以下形式

$$[H(s)] = \text{下余项} + \sum_{k=1}^j \left( \frac{[A_k]}{(s-s_k)} + \frac{[A_k^*]}{(s-s_k^*)} \right) + \text{上余项}$$

在这个方程中，矩阵是  $[A]$  是留数矩阵，是从曲线拟合过程中得到的，同时也能从方程的分母中得到系统极点，或者频率和阻尼。但是这些留数通过下式直接与模态振型相关

$$[A(s)]_k = q_k \{u_k\} \{u_k\}^T$$

留数和模态振型之间的关系含有你提出来的那个问题的答案。让我们展开上式，观察矩阵其中一些项

$$\begin{bmatrix} a_{11k} & a_{12k} & a_{13k} & \cdots \\ a_{21k} & a_{22k} & a_{23k} & \cdots \\ a_{31k} & a_{32k} & a_{33k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = q_k \begin{bmatrix} u_{1k}u_{1k} & u_{1k}u_{2k} & u_{1k}u_{3k} & \cdots \\ u_{2k}u_{1k} & u_{2k}u_{2k} & u_{2k}u_{3k} & \cdots \\ u_{3k}u_{1k} & u_{3k}u_{2k} & u_{3k}u_{3k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

如果观察矩阵每一列元素，发现每列包含带有一些比例因子的模态振型信息，根据互易性，同时也知道每行也包含这些模态振型信息。如果仅考虑一列，比如第一行，那么就可以看到

$$\begin{bmatrix} a_{11k} \\ a_{21k} \\ a_{31k} \\ \vdots \end{bmatrix} = q_k u_{1k} \begin{bmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ u_{3k} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

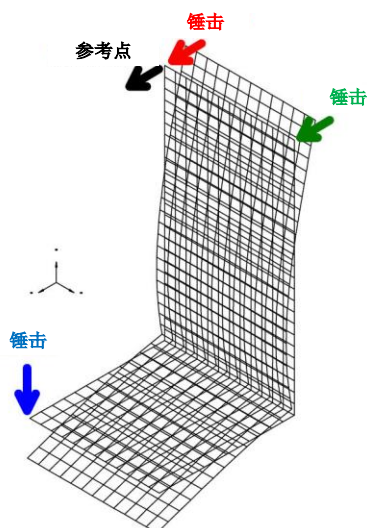
因此，方程中提出为公因子的模态振型值，称为“参考”自由度。换句话说，所有测量都受这个参考自由度的影响。如果参考自由度为零（位于某阶模态节点上），那么不管进行多少个测量，都不可能从这些测量数据中观测到这阶模态。

这个基本方程明确包含你刚才提出来的那个问题的答案。只要感兴趣的每阶模态的参考自由度的模态振型值不为零，那么频响函数就有与输入-输出位置相关的留数值。只要模态振型在 X, Y 和 Z 方向有与参考自由度相关的振型值，那么由与这个参考自由度相关的测

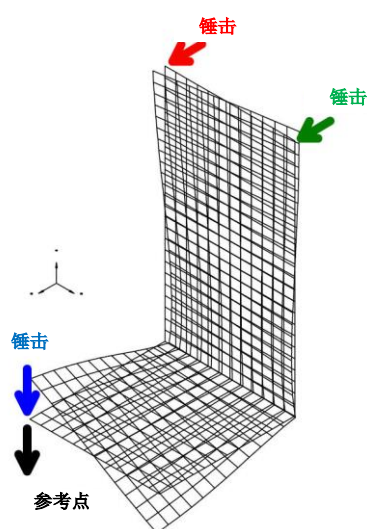
量数据就能观察到这些模态振型。就是这么简单！

现在让我们考虑一个简单的结构去说明这一点。考虑一个简单的 L 形支架，用于说明实验模态参考自由度，以及它与其他测量自由度的关系。以下各图中加速度计安装位置作为参考点位置，用黑色表示；蓝色，红色和绿色分别表示各个不同的锤击位置。

对于支架的第 1 阶模态，参考加速度计可以安装在结构顶部角点 X 方向。注意到，如果在支架顶部角点 X 方向锤击结构（红色或者绿色），或者在底部角点 Z 方向锤击（蓝色），那么结构在这些位置将有显著的响应。这就意味着如果在顶部角点 X 方向（红色或者绿色）锤击支架，那么这个参考点在 X 方向有响应。如果在底部角点 Z 方向（蓝色）锤击支架，那么这个参考点在 X 方向也有响应。因此从选择的参考点位置可以很容易地得到这阶模态。

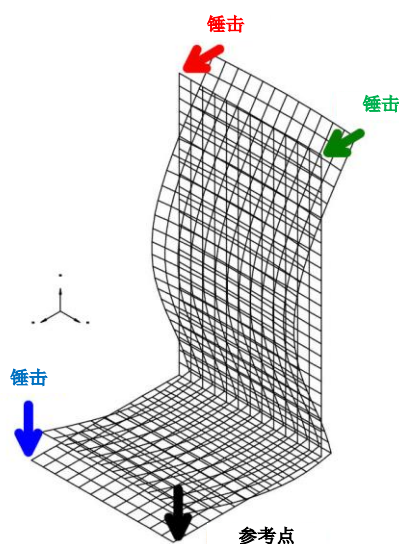


对于支架的第 2 阶模态，参考加速度计可以安装在结构底部角点 Z 方向。如果在同一点的 Z 方向（蓝色）锤击支架，结构的这阶模态在这个参考点响应明显。但同时也注意到如果在顶部角点 X 方向（红色或者绿色）锤击支架，那么参考加速度计在 Z 方向也有响应。因此，对于这阶模态而言，选择这个参考点位置是合理的。

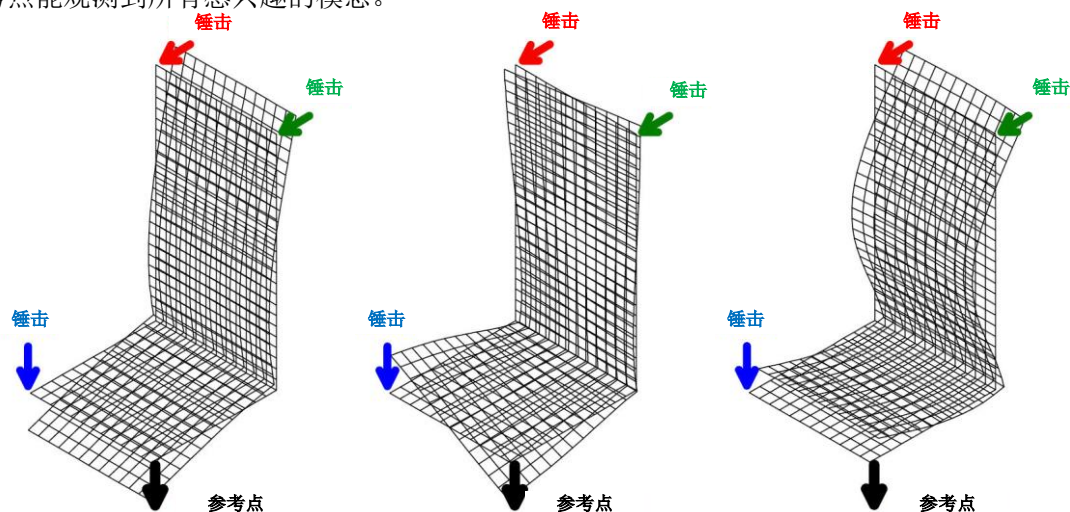


如果考虑第 3 阶模态，参考加速度计位于底部角点 Z 方向，在结构上这三个位置进行锤击，那么这阶模态的参考点位置有明显的响应。





现实问题在于，只选择“一个”参考点位置能否充分捕捉到所有感兴趣的模态的动态特征。在这个例子中，似乎选择结构底部角点 Z 方向作为参考点位置是合适的，从这个参考点能观测到所有感兴趣的模态。



现在我们能明白单个参考点也能充分地观测到所有感兴趣的模态，仅仅只需在一个方向安装加速度计就能实现这个目的。当然，如果使用更多的参考点，这完全是可接受的，并且这是一个更优的测试方法。但是这些额外的参考点，对于提取三维模态振型而言，不是必须的。

我希望这些能消除你对模态测试需要三个方向的参考自由度的误解。回想一下，如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



模态振型缩放需要驱动点测量。有其他不需要驱动点测量的缩放方法吗？  
让我们来探讨这个。

模态振型缩放对于开发正确的动力学模型是非常重要的，而这个动力学模型可能用于结构动力学其他方面的研究。这些研究可能是仿真、预测、动力学修改和相关性检查等等。虽然有些实例缩放可能不关键，但我总是推荐进行缩放，因为这样可能获得的数据是唯一的。通常，模态振型缩放需要一个驱动点测量。然而，这儿还有其他可供选择的方法用于采集 FRF，获得缩放的模态振型，但不需要进行驱动点测量。让我们来讨论这个方面。

回想一下，用于描述频响函数的极点和留数，频响函数可以写成以下形式

$$[H(s)] = \text{下残余项} + \sum_{k=1}^j \left( \frac{[A_k]}{(s-s_k)} + \frac{[A_k^*]}{(s-s_k^*)} \right) + \text{上残余项}$$

这些留数直接与模态振型相关。不涉及方程处理所有的步骤，考虑系统第‘k’阶模态的相应关系，其方程如下（展开其中一些项）

$$[A(s)]_k = q_k \{u_k\} \{u_k\}^T$$

$$\begin{bmatrix} a_{11k} & a_{12k} & a_{13k} & \cdots \\ a_{21k} & a_{22k} & a_{23k} & \cdots \\ a_{31k} & a_{32k} & a_{33k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = q_k \begin{bmatrix} u_{1k}u_{1k} & u_{1k}u_{2k} & u_{1k}u_{3k} & \cdots \\ u_{2k}u_{1k} & u_{2k}u_{2k} & u_{2k}u_{3k} & \cdots \\ u_{3k}u_{1k} & u_{3k}u_{2k} & u_{3k}u_{3k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

如果仅考虑这些方程组的第‘r’列，那么留数与振型的关系用下式表示

$$\begin{Bmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ a_{3r} \\ \vdots \\ a_{rr} \\ \vdots \end{Bmatrix} = q u_r \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_r \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

因此，每个 FRF，可通过下式得到留数和模态振型之间的关系，如

$$\begin{aligned} h_{1r} &\Rightarrow a_{1r} = u_1 u_r \\ h_{2r} &\Rightarrow a_{2r} = u_2 u_r \\ h_{3r} &\Rightarrow a_{3r} = u_3 u_r \\ &\vdots \end{aligned}$$

注意到未知数个数多于方程个数，无论额外增加多少个方程，都无济于事。不可能确定模态振型，除非包含一个特定的测量，也就是驱动点测量，假设如下

$$\mathbf{h}_{rr} \Rightarrow \mathbf{a}_{rr} = \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r$$

有了驱动点测量，那么可以确定参考点处的模态振型值，因而就可以确定所有其他的模态振型系数。

但是如果没有驱动点测量可用或者很难获得驱动点测量，那么将怎么办？有没有其他的方法，进行其他的测量能得到缩放的模态振型？答案是肯定的。让我们来描述一组测量，能获得等同于驱动点测量的缩放结果。

考虑频响函数矩阵中任一位置的一些元素。矩阵中下标‘r’表示参考点，下标‘o’，‘p’，‘q’，‘s’和‘t’表示任意的测量位置。大多数测量是相对于参考点‘r’得到的，但是有一个测量不是相对于参考点‘r’得到的。我们假设驱动点测量为 $\mathbf{h}_{rr}$ ，没有测量它，但是在矩阵中还是显示出来了，仅用于解释说明目的。在这考虑三个感兴趣的特定的 FRF（矩阵中这些元素下面有双划线），需要用到这三个 FRF 推导一些简单的等式。

$$\left[ \begin{array}{ccc} & \mathbf{h}_{or} & \\ \rightarrow & \underline{\underline{\mathbf{h}_{pq}}} & \leftarrow \\ & \underline{\underline{\mathbf{h}_{pr}}} & \leftarrow \\ & \underline{\underline{\mathbf{h}_{qr}}} & \leftarrow \\ & \vdots & \\ & \Rightarrow \mathbf{h}_{rr} & \Leftarrow \\ & \mathbf{h}_{sr} & \\ & \mathbf{h}_{tr} & \end{array} \right]$$

记得对于某一阶特定的模态，某一特定位置的测量而言，留数-模态振型的关系可以写成

$$(1) \quad \mathbf{h}_{pq} \Rightarrow \mathbf{a}_{pq} = \mathbf{u}_p \mathbf{u}_q$$

$$(2) \quad \mathbf{h}_{pr} \Rightarrow \mathbf{a}_{pr} = \mathbf{u}_p \mathbf{u}_r$$

$$(3) \quad \mathbf{h}_{qr} \Rightarrow \mathbf{a}_{qr} = \mathbf{u}_q \mathbf{u}_r$$

（注意：为简洁起见，比例因子 q 没有写出）。在这儿选择这三个特定的 FRF 用于说明另一种缩放原理。

现在，第一个方程可以写成

$$\mathbf{u}_p = \frac{\mathbf{a}_{pq}}{\mathbf{u}_q}$$

代入第 2 个方程，得

$$\mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{a}_{pr}}{\mathbf{a}_{pq}} \mathbf{u}_q$$

第三个方程可以写成

$$\mathbf{u}_q = \frac{\mathbf{a}_{qr}}{\mathbf{u}_r}$$

代入第二个修改后的方程，得

$$\mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{a}_{pr}}{\mathbf{a}_{pq}} \frac{\mathbf{a}_{qr}}{\mathbf{u}_r}$$

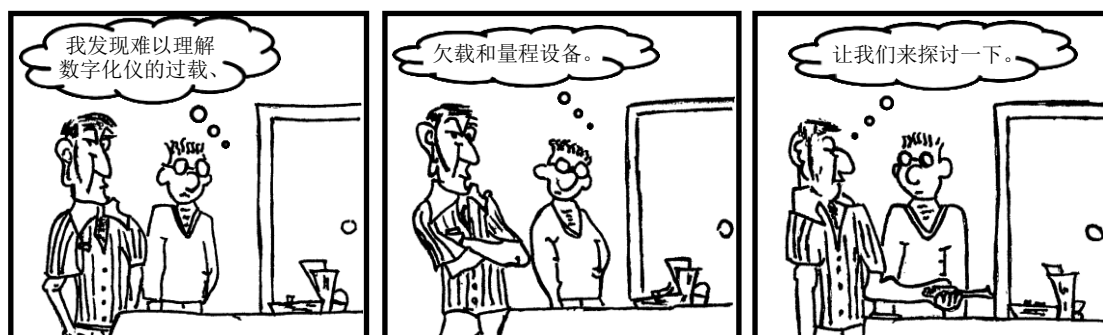
然而重新排列，获得与驱动点测量等价的形式为

$$\mathbf{u}_r^2 = \frac{\mathbf{a}_{pr} \mathbf{a}_{qr}}{\mathbf{a}_{pq}}$$

我知道我通常都不用这么多的方程去作解释说明，但这次方程也只包含了少量简单的运算，这样做的目的是为了揭示另一种获得参考自由度模态振型系数的缩放原理。记住可以不进行驱动点测量，也可以为参考自由度获得模态振型系数。

有时，这可能是一种非常有用的方法，特别是在无法进行驱动点测量或者不方便获得驱动点测量时。虽然我一般不用这个方法，但是在进行锤击法测试时，因结构的限制，很难使锤击设备进入到指定区域时，这时这个方法就派得上用场了。当激振器测试很难进行驱动点测量时，这个方法也是非常有用的。

我希望这些能消除你对模态振型缩放和需要驱动点测量的疑惑。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



我发现难以理解数字化仪的过载、欠载和量程设置。  
让我们来探讨一下。

这个问题值得讨论。先前我们已经讨论过与锤击法测试相关的一些项，如锤头选择、触发延迟和连击。在这涉及到其他一些项，与模数转换器的过载/欠载、数字化仪的低利用率和测试非线性结构的困难程度有关，这些都需要我们额外关心。为了说明量程设置和它们对模数转换器（ADC）设置的影响，将继续使用先前用过的一些典型测量。

图 1 显示的为一次锤击测量，此次输入力没有充分激起整个感兴趣的频率范围。在后半段频率范围内，激励力没能充分激起结构，因而输入和输出响应在这个频率范围内都比较弱。但是在前半段频率范围内，激励力信号与响应信号都很显著。

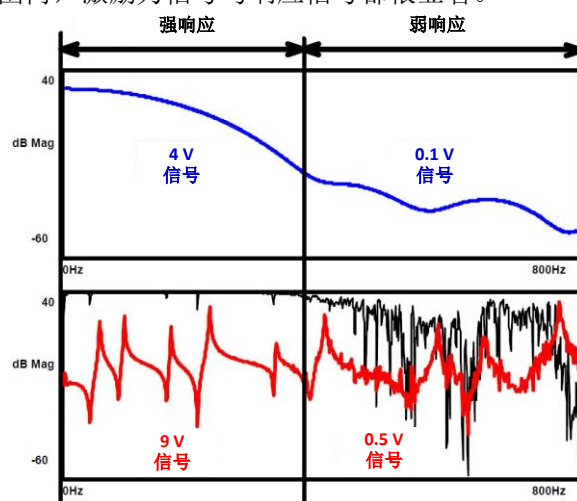


图 1 锤击输入仅激起了部分频谱

信号能量主要集中在低频段。现实问题在于能量怎样才能分布到整个频率范围（本质上是评估曲线区域，用于讨论目的）。出于论证目的，我们假设输入力谱（蓝色）有近 4V 电压位于低频段，0.1V 位于高频段，总电压为 4.1V。并且假设响应（红色）电压 9V 分布在低频段，0.5V 在高频段。显然，响应总电压在低频段占主导地位。这种情况下，输入通道和输出通道的量程范围可能分别设置成 5V 和 10V。

这意味什么呢？让我们使用一个单频正弦波去说明数字化仪的识别能力。出于说明目的，对一个简单的 6 位 ADC 首先设置满量程，然后设置一个较低的量程范围用于说明数字化仪是怎么影响测量幅值的（注意，所有的值都是近似和取整，这仅仅是为了便于说明）。图 2 显示的正弦波峰值为 1.5V，ADC 设置成满量程 10V。图 2 仅显示了 ADC 包含信号的那部分量程。注意到识别能力较差（实心黑色点表示测量的信号），因为量化误差使得正弦信号的真实幅值没能正确地识别。如果 ADC 量程设置远大于被测信号的真实幅值，那么就将出现这种情况（在这个例子中，ADC 的满量程为 10V）。

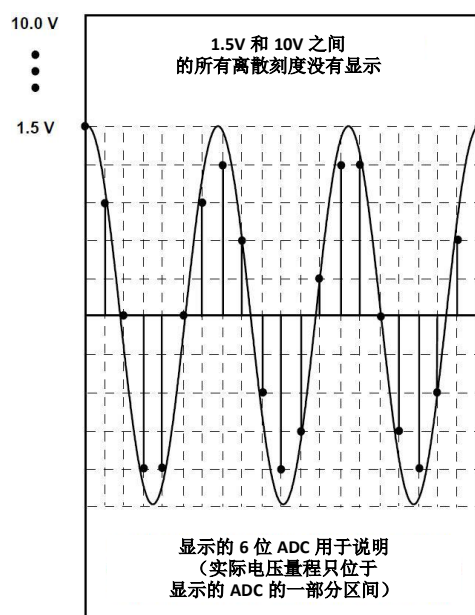


图2 较差识别下的正弦信号

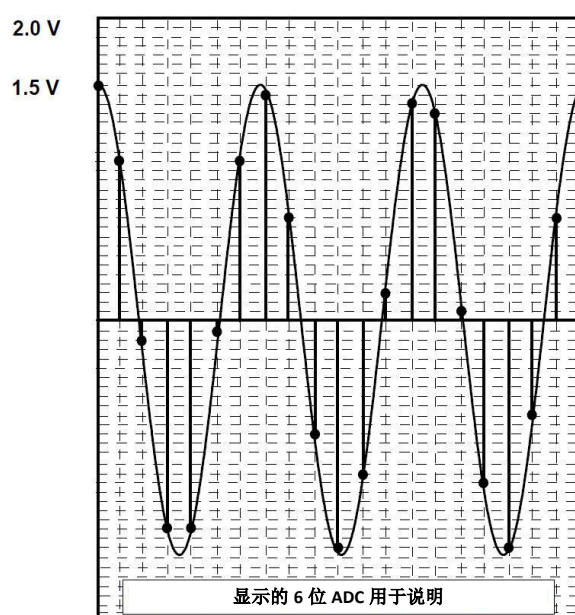


图3 合理识别下的正弦信号

如果 ADC 的量程设置为 2V，如图 3 所示。信号的幅值识别能力就会更合理些。这是因为被测信号的幅值占 ADC 的动态范围的绝大部分，ADC 量程利用率高（在图 3 中设置 ADC 的量程为 2V 用来测量 1.5V 的信号）。

接下来考虑另外一种情况，同时测量两个不同频率和不同幅值的正弦信号。两者都使用 2.0V 的量程。图 4 中，清楚地表明两个正弦波的幅值较大者在 ADC 量程设置中占主导地位。然而，需要着重注意的是小信号遭受的量化误差比大信号严重。这是结构测量普遍存在的一个问题，没有办法避免它。但是如果 ADC 设置成 10V 满量程，可以想象一下量化误差会有多严重。

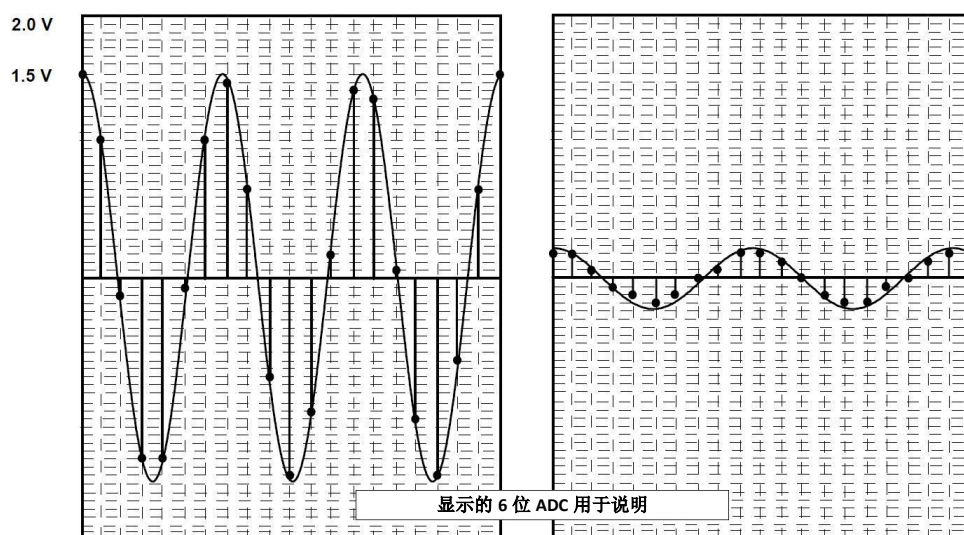


图4 同时测量两个正弦波可能存在识别问题

现在我们对一个单频正弦波量程设置已有了一些主意，可以更深刻地理解图 1 所示的测量所引起的问题。没能充分激起高频段，因而高阶模态的响应较小。高频段测量遭遇了量化误差。图 1 所示的在高频段的问题类似于图 4 所示的问题。

现在考虑另一种情况：力锤充分激起了超过感兴趣频率范围（128Hz）以外的结构模态，如图 5 所示。出于论证目的，我们假设能量分布于希望得到的频率范围（低频段）和高频段（充分激起了位于感兴趣的频带之外的模态）。注意到传感器将测量到系统的整个响应（能



量), 即使只有一部分能量用于数字化。ADC 量程设置必须高于信号的实际需要的量程, 因为传感器测得的总电压实际上受高频信号影响严重。这就意味着 ADC 量程必须设置成高于需要的量程, 以便容纳接收这些高频成分, 但是这样做的结果是低频成分将会遭遇量化误差。

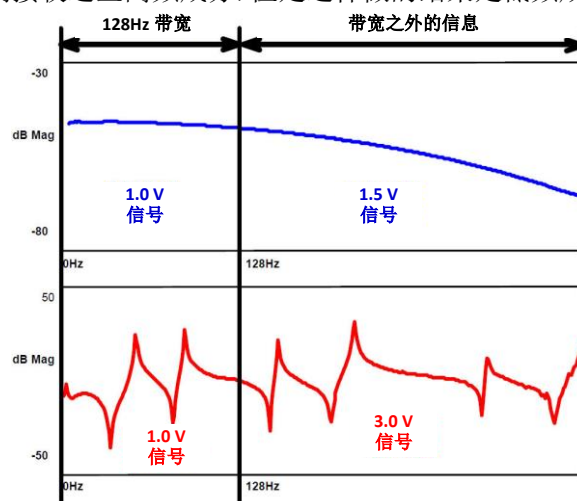


图 5 激起了感兴趣带宽之外的模态

我试图采用迂回的方式回答有关数字化仪的量程设置问题, 采用了结构系统的一个典型测量。我希望这些能解释测量时这个重要的方面。如果你还有模态分析其他问题, 请咨询我。



平板的模态振型有预定的顺序吗？

让我们来探讨一下。

这个问题出现的次数比你想象的要多。这需要讨论，并且给出一些实例说明和澄清这个经常让人感到困惑的问题。

很多时候，我总是听到人们说，结构的模态总是从扭转开始。虽然对于一些特定的结构，这可能是成立的，这些结构的模态可能通常是从扭转开始，但是关于各阶模态出现的先后次序，却没有预定的规则。

例如，很多人经常认为平板的模态肯定是从扭转开始的，但是对于这种先后顺序却没有数学依据。只可能是因为这样：在过去一段时间里，人们见到的所有平板结构的第 1 阶模态都是扭转模态。当然，一旦某人多次看到结构的第 1 阶模态都是扭转模态，那么在他看来，**所有类似的平板结构的第 1 阶模态肯定都是扭转模态。但这完全没有根据！**

我记得多年前，对一个全新的加筋的白车身结构进行分析。结构工程师已经花费了大量的时间专注于结构设计，希望显著提高汽车车身的第 1 阶弹性模态。在此之前，这类结构的第 1 阶模态总是扭转模态（T），紧接着为弯曲模态（B）。当第一次分析有限元模型时，汽车车身的第 1 阶模态却是弯曲模态，而不是扭转模态。这让人难以置信，因为在到那之前，第 1 阶模态总是扭转模态，这一观点深入人心（可以作为第 11 条戒律）。

没人相信这个分析模型，因为这似乎与人们所相信的完全矛盾，每个人都认为“**第一阶模态应该是扭转模态**”。但是按照他们所期待的顺序出现，却完全没有理论根据。分析模型是质量和刚度的分布，通过特征值求解得到结构的频率和模态振型，质量与刚度分布满足力平衡方程。如果建模和分析都正确，那么这个分析结果将确定频率和模态的先后顺序，这满足数学理论（当然，模型可能存在误差，但这完全又是另一码事了）。

**基本事实就是频率和各阶模态振型出现的先后次序只受结构质量和刚度分布的影响，不受其他因素影响。**

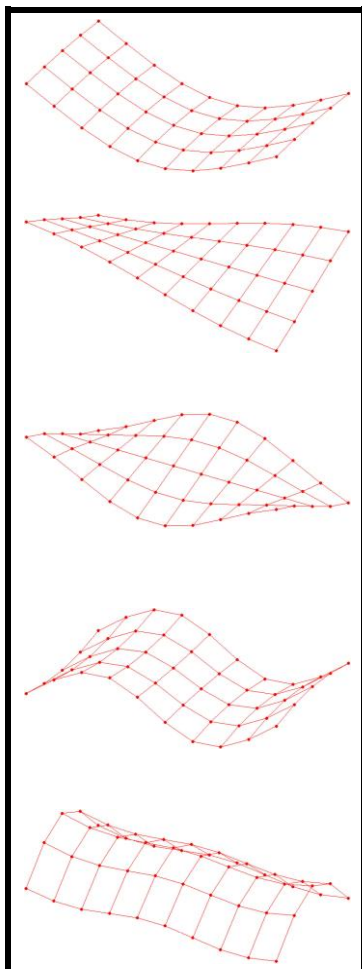
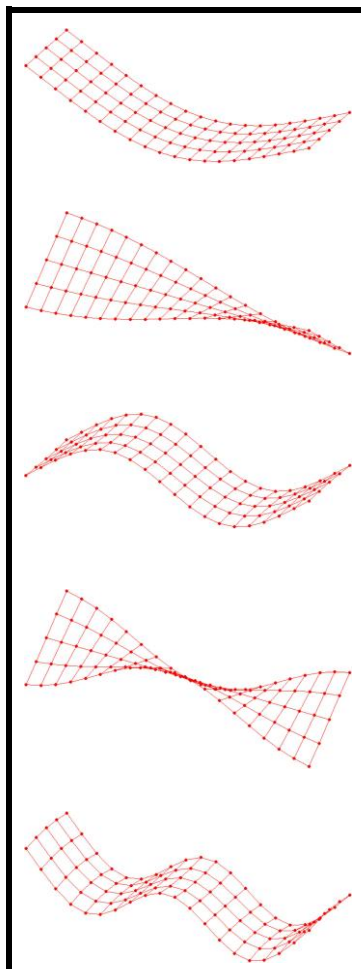
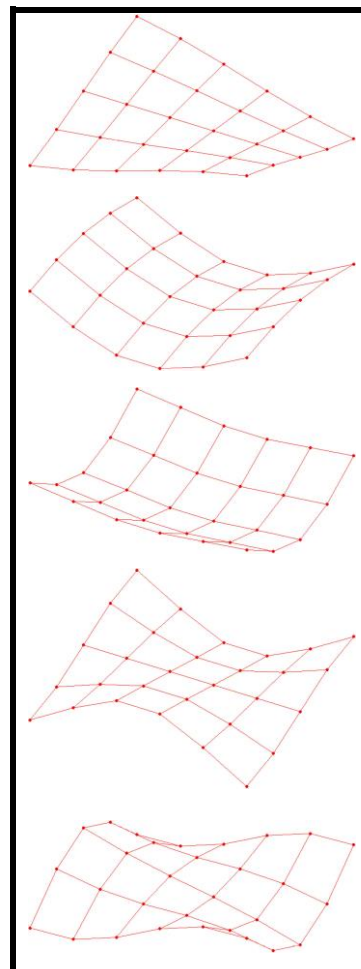
为了说明各阶模态可能出现的次序，采用有限元方法生成三个不同长宽比的平板结构，求解每一个结构。下图中给出了这三个不同结构的前五阶模态，从顶部到底部模态次序依次为从最低阶到最高阶（仅考虑前五阶）。其中字母 B 表示沿长边方向的弯曲模态，B2 表示沿短边方向的弯曲模态，T 表示沿对称轴的扭转模态。分析这三个不同的平板，可以看出平板没有特定的模态振型先后顺序。从图中可以看出，每个结构的模态振型先后顺序都不相同。

只要我们继续关注各阶模态振型出现的先后次序，那么有人就会问，是否沿平板长边方向的弯曲模态（B）总是比沿短边方向的弯曲模态（B2）先出现？在迅速回答这个问题之前，先停下来思考一会儿……

这是一个欺诈性的问题？在回答这个问题之前，我需要思考什么？材料属性是什么？沿长边和短边的材料属性相同吗？如果材料是各向同性材料，那么沿长边方向的弯曲模态（B）将会比沿短边方向的弯曲模态（B2）先出现。但如果材料是加强的碳纤维复合材料，加强的碳纤维沿平板长边方向分布，那么情况又怎样呢？那么这时可能的情况是沿长边方向平板的刚

度更大。那么，此时有可能是沿短边方向的弯曲频率(B2)会比沿长边方向的弯曲频率 (B) 先出现。显然，原则就是你确实需要思考这种可能性，现实中完全是可能的！

我已经设法回答了平板的各阶模态可能出现的先后次序这个问题。显然，任何构造的结构都有自身特有的弯曲和扭转模态，不仅仅是平板结构，其各阶模态出现的先后次序也不是特定的，取决于结构的质量和刚度分布。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。

**B-T-T-B-B2****B-T-B-T-B****T-B-B2-T-T**



一旦我进行了一个高质量的测量, 还有理由需要察看每个 FRF 的时域和频域结果吗?  
让我们来探讨一下。

这个问题引出了一个重要的话题。一旦建立了试验, 就必须确保测量的数据是高质量的, 因此, 你需要总是监视所有的测量数据。这是必须的!

我见过一些人非常关心一个测点位置的锤击力与响应、输入力谱、FRF 和相干, 但却忽略监视其他所有的测点。通常的观念是一旦进行了驱动点测量, 检查力谱和相干是可接受的, 那么测试就可以继续进行, 不会存在任何太大的问题。但是这样做的问题在于, 一个测点的数据似乎是高质量的, 并不一定意味着其他所有测点的测量都是高质量的。我多次碰到过这样的测试: 测试结构的不同部位, 得到了与预期大不相同的测量特征。

因此, 让我们考虑一次典型的测量过程, 如果测试过程中不关心每个测点的测量数据, 确定可能会出现什么样的错误。对实验室的一个支架结构去进行一些测量。显然, 需要检查一些测点的时域和频域数据。通常, 驱动点测量作为第一个开始的测点。支架的锤击力时域波形和时域响应, 如图 1 所示。响应在采样周期末端几乎衰减到零, 因此, 响应信号可能需要施加一个小指数窗, 以最小化可能出现的泄漏。

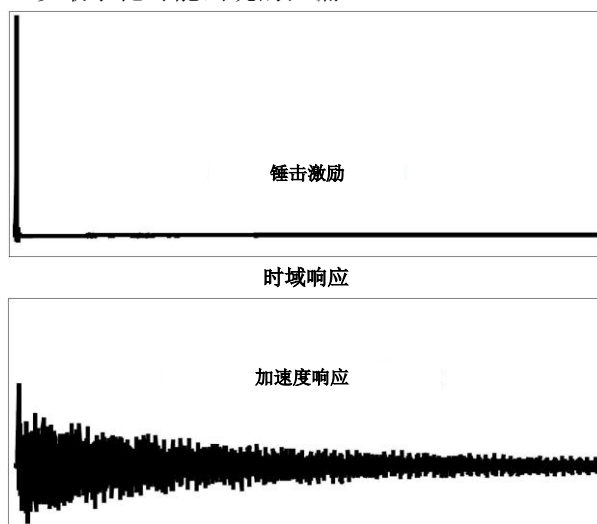


图 1 激励力和加速度计响应

接下来检查输入力谱, 以确保在感兴趣的频带内, 激励结构的激励力是充分的。通常这个力谱在整个频带上应该适当平坦, 在想要的频带内有近 10~15dB, 也可能近 30dB 的衰减 (注意我说的是“想要的”的频带内, 这个频带可能不是整个测量频带)。检查相干, 以确保在输入力和输出响应之间有相当好的因果关系, 这样得到的测量才是高质量的测量。检查 FRF 的峰值, 这些峰值指明了系统的模态。图 2 为这次测量的力谱、FRF 和相干, 看起来非常好。除了检查 FRF 的幅值之外, 检查 FRF 的复数部分 (实部和虚部) 也是个不错的方法。

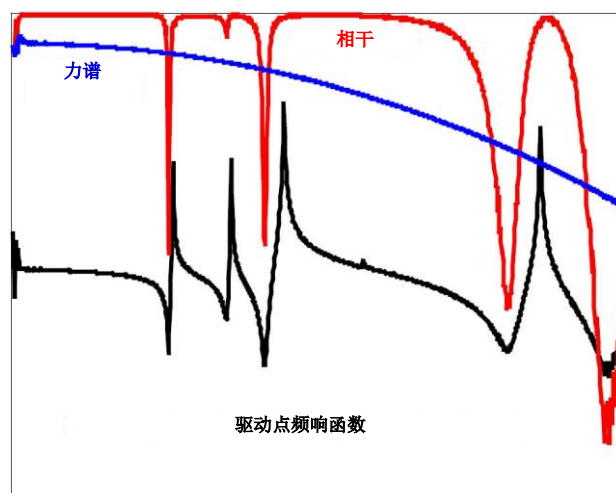


图 2 FRF、力谱和相干

也应该检查 FRF 的实部和虚部，以确保测量看起来与预期一样。图 3 为这次测量 FRF 的实部和虚部，从图中可以看出此次测量合适。

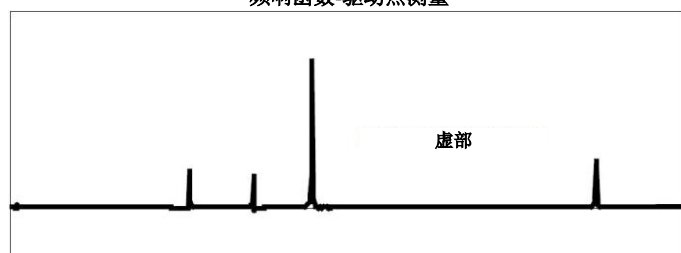
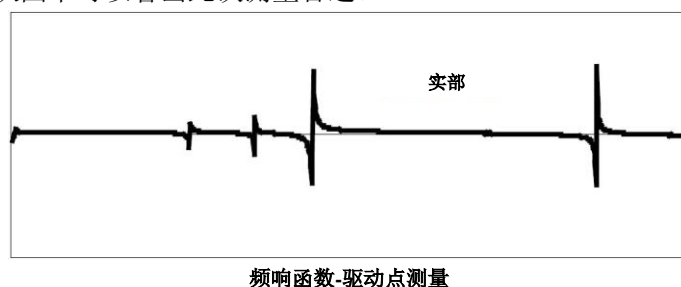


图 3 驱动点 FRF 的实部和虚部

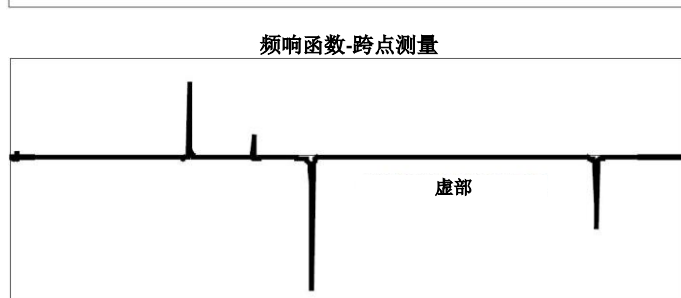
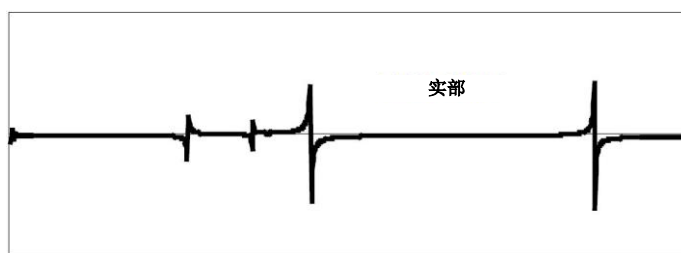


图 4 跨点 FRF 的实部和虚部

然而，有一点须小心。很多时候，在测试的开始阶段，人们只检查驱动点测量。虽然这

是系统测试过程中比较关键的一次测量，特别是考虑模态振型缩放时，但是驱动点测量不总是用于检查效果最理想的测量。比如，驱动点 **FRF** 的虚部的各个峰值总是具有相同的相位关系。但是如果两阶模态彼此非常靠近，那么有时就很难确定数据中实际存在多少阶模态。很多时候，更合适的是检查一条跨点的 **FRF**，如图 4 所示。注意到跨点 **FRF** 的虚部所有峰值不存在相同的相位关系。这对确定空间上非常接近的密集模态相当有用，在测试初期应该总是作这个检查。因此，一旦这样做了，是否真的需要持续监视所有测点位置的时域和频域数据？图 5 显示的测量将帮助我们说明为什么一直监视是必需的。

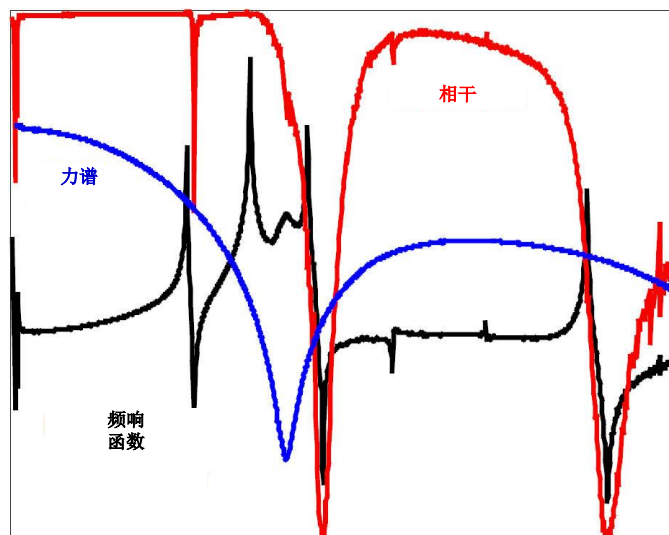


图 5 FRF、力谱和相干

如果仅仅测量 **FRF** 和相干，那么力谱数据就丢失了。只有 **FRF** 和相干，似乎测量较差，可能数据被指责成受结构非线性、噪声、复杂阻尼和其他一大堆众所周知的问题等的影响。但是它们当中谁也不是这次测量的真正肇事者。其他所有测点的力谱都相当平坦，这与早期测量的力谱有很大的不同。对于这个特定的结构，在一些确定位置进行锤击，结构局部刚度有显著变化，因此很难保证各个测点能得到相当一致的力谱。刚好这个结构具有这种“怪异的特性”，但对其他任何结构而言，都可能具有这种特性。因此，在模态测试过程中，如果不打算检查所有测点的测量数据，那么就要存储每个测点的所有数据，不能只存储 **FRF** 和相干。因为从这个例子可以看出，力谱对于解释图 5 所示的测量，起到了非常关键的作用。

我希望我已经让你明白了模态测试过程中一些不同方面和可能需要强调的各项。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





我知道激振器有不同的激励信号，哪种是最合适的？  
让我们来探讨一下。

让我们来探讨当今模态分析最常用的激励技术。这些激励技术包括随机、伪随机、猝发随机、正弦快速扫频和数字步进正弦。在这简短地回顾一下这些激励技术（因为之前已经介绍过），但更重要的是所有这些激励方式是否一直提供相同的结果。这是不能直截了当就能回答的，因此我们需要讨论激振器激励测试的一些考虑方面。图 1 所示的为现今主要使用的激励信号。

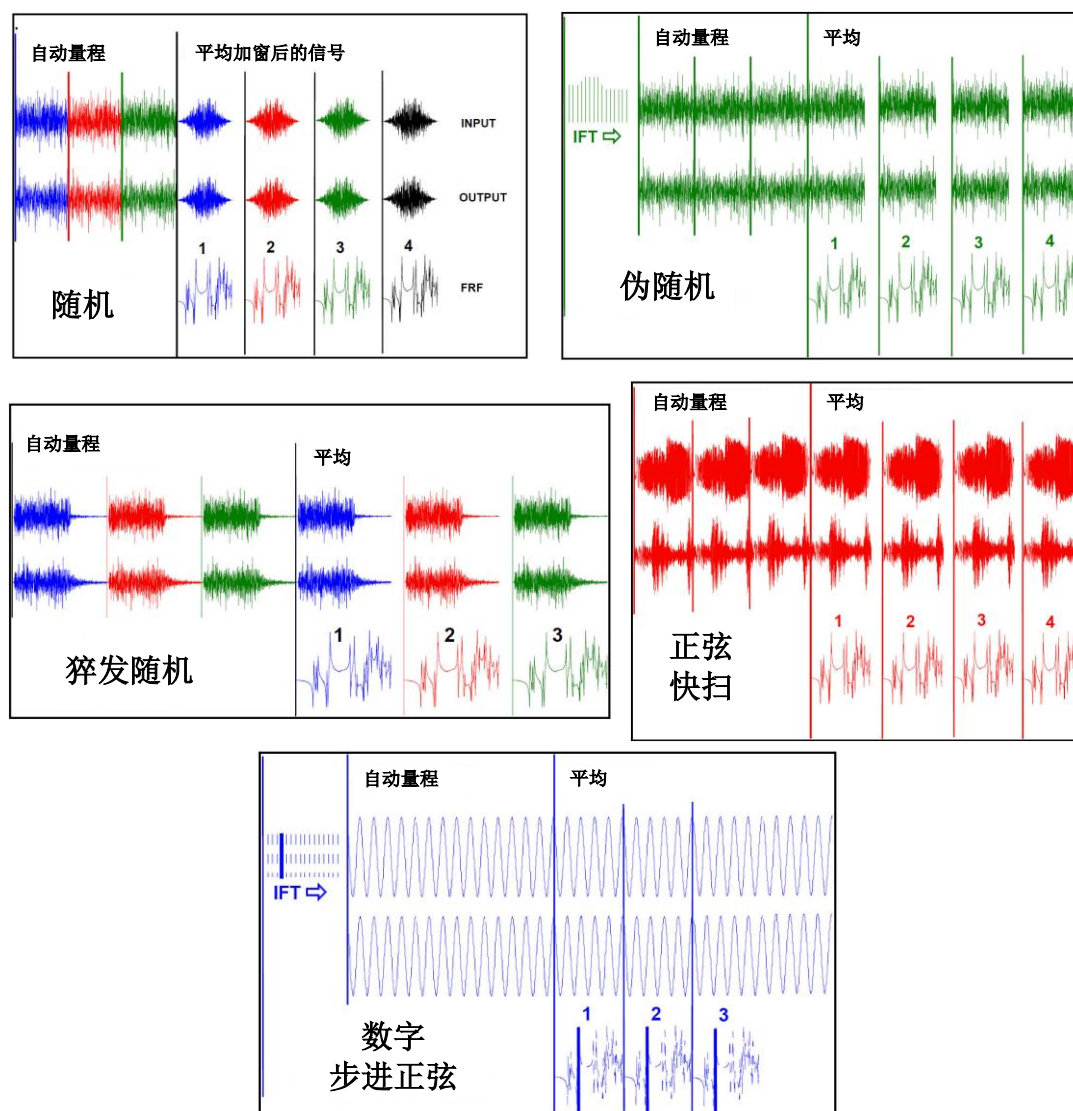


图 1 激振器典型的激励信号

随机激励今天有时仍然使用,即使泄漏和窗函数会引起测量信号失真。图 1 所示的随机激励中用不同的颜色表示不同时间段的时域信号。(这样做主要是突出表明测量的每个时域数据块信号都是不同的。)因为每个数据块信号都不同于其他的数据块信号,所以采集每个数据块时,激励系统的频谱特征都不相同。如果系统具有轻微的非线性,那么系统对每个数据块的响应也不相同,平均后的数据将反映出轻微非线性系统的最佳线性描述。这类激励信号对于最小化或者平滑遭受噪声或者其他测量干扰因素影响的数据,非常有用。但是泄漏和窗函数会使测量数据失真,因此这种激励技术不是最合适的激励技术。

伪随机激励技术是感兴趣频带内的一组频率谱线通过逆变换到时域,产生激励信号的一种激励技术。因为伪随机激励信号本质上是正弦信号,倘若激励时间足够长,能得到系统的稳态响应,那么不存在泄漏。这就证明了伪随机激励是一种非常实用的激励技术。然而,因为激励信号是重复的(注意不同数据块的激励信号颜色相同),所以系统将以一种确定的方式进行响应。这将不能平均系统中可能存在的任何轻微非线性或者其他影响因素。对于线性系统,伪随机激励效果突出。

猝发随机激励技术集成了随机激励和伪随机激励两者的优点。信号从一个样本纪录(时域数据块)到下一个样本纪录是随机的(注意图中用不同的颜色表示不同的样本纪录),并且在处理过程中能平均非线性。因为信号在一个采样周期内能完全观测到,因此不存在泄漏,不需要加窗。唯一需要关心的是要确保输入和输出响应二者在数据采样周期内能完全观测到。

正弦快速扫频激励方式是一种快速扫频技术,信号在采样周期内能完全观测到。倘若能得到稳态响应,那么不存在泄漏影响。这种激励技术的优缺点非常类似于伪随机激励技术。一个额外的优点就是输入力的大小可以控制,能用于确定系统中的非线性特征。

数字步进正弦激励技术是另一种非常实用的激励技术。除了每个时刻只有一个频率激励外,其他特征类似于伪随机激励。但是一个重要的不同之处就是对信号幅值进行了改进。宽带技术(前面讨论的激励信号都属于这一类)要求模数转换器捕捉到整个频谱范围内信号的所有能量,但是其频率可能具有以下特征:在频谱上幅值变化幅度大。这对数字步进正弦来说,不成问题,因为任一时刻数字步进正弦激励方式的激励/响应的所有能量在频谱图中只体现在单条谱线上。因此,量化误差在这种激励方式中不会成为问题。

因此,到目前为止,似乎对需要何种激励技术已相当直观了,但现实中,事情不会总是这么简单。因此,我们需要将这些激励技术进行分类,探讨可能出现的一些问题。在过去几十年里,我发现猝发随机激励技术通常工作最优最全面。但是,当结构具有良好的线性特征时,我也使用正弦快速扫频激励技术。当我需要极高分辨率的 FRF 时,我会使用数字步进正弦激励技术。偶尔,我也使用伪随机和随机激励技术。因此让我解释何时使用这些激励技术和为什么要使用它。

多年前我测试过一个小阻尼结构系统,猝发随机激励对它不是很有效。由于系统阻尼太小,以致于在一个采样间隔时间内响应不能完全观测到,即使猝发时间小于总采样时间的 5%。幸运的是,这是个线性结构,因此可以使用伪随机激励技术(但正弦快速扫频激励技术对这个结构同样有效)。

当一个结构存在一些非线性特征时,那么激励量级应与结构在现场条件下的激励相当。正弦快速扫频技术被证实对这类测试非常有效。为什么不使用数字步进正弦激励方式,因为对于这个测试,没有足够数量的采集通道保证测试的可行性。

我认为,对于一些情况,相对于其他激励技术而言,总会存在一种最佳的激励技术能提供效果最佳的测量。因此,需要比较每种激励技术,以确定哪种激励技术最合适。不要只依赖于一种激励技术,虽然在过去可能证明它是一种可接受的激励技术,但现今它不一定效果最佳。

在今天，模态测试普遍使用多通道采集系统，我推荐使用所有的激励技术进行激励，以便确定哪种激励技术最合适。并且今天硬盘存储容量也大，大容量数据存储不再成为问题。既然已经花费了大量的时间在结构上安装大量的加速度计，那么为什么不采用所有的激励技术进行模态测试，即使数字步进正弦花费的时间远多于宽带激励技术。如果你已经花费 3 或 4 天时间准备一次大规模的测试，你会认为有人将关心你是否只花费几个小时和是否采集到的所有可能的数据吗？我认为这不是拒绝的理由，至少你采集到了所有的数据。

我希望我已经回答了你对有关各种不同的激励技术的疑问。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



锤击测试力谱看起来失真，你会认为我的 FFT 分析仪有问题吗？  
让我们进行一次测量，明白原因何在。

问题的唯一解决方法是做一些故障排除。当然我们对正确答案是什么已有了一些见解。对于锤击法测试，力的时域波形应该是作用时间非常短的一个简单脉冲，相应的频谱在一定频带内应该相当平坦。力谱的宽度直接与脉冲作用时间长短有关。通常，脉冲作用时间越短，激起的频带越宽；相反，脉冲作用时间越长，激起的频带越窄。至少这一点我们是可以预料的。现在让我们走进实验室，用你的分析仪进行一些测量，看看最终是否是这样（在这篇文章里，我将试图去复现你进行的测试，但因 FFT 分析仪硬件的不同，我不能确定得到的现象是否严格相同）。对于这次测试，使用一个典型的力锤，被测对象为一典型结构，在其上面安装了一个加速度计。

图 1 显示的为力脉冲和时域响应（左面两条黑色曲线）。时域信号看起来是合理的。力信号是一个尖脉冲，在整个脉冲之外信号为零。根据时域响应信号的特点，系统的响应衰减似乎也是合理的，但是需要加窗，以最小化泄漏所带来的影响。

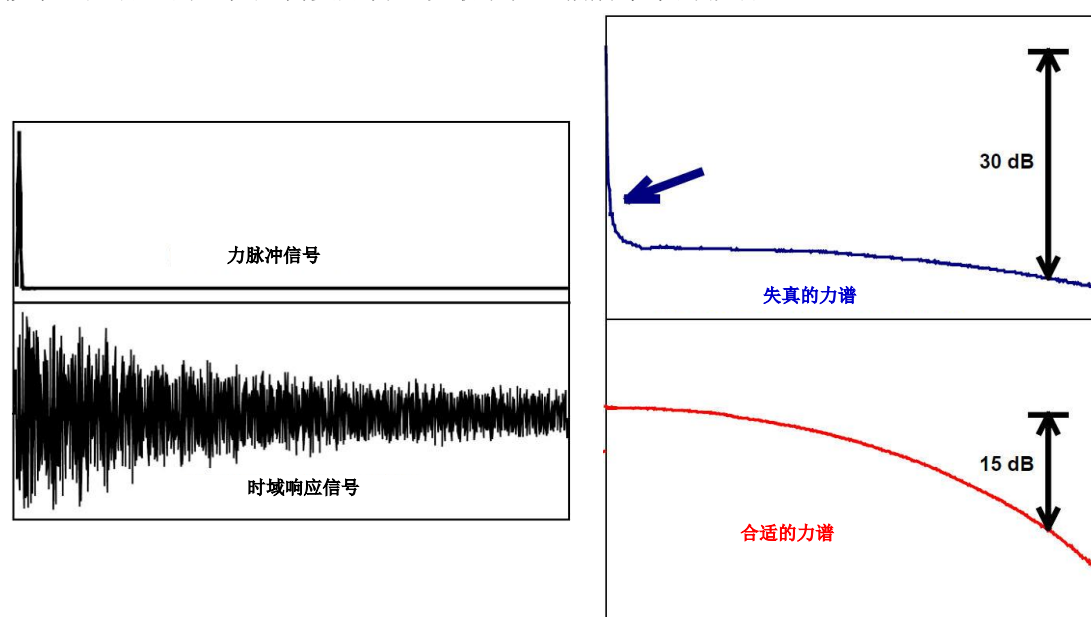


图 1 力脉冲波形、指数响应和力谱（合理的和失真的）

力谱（图中右面蓝色表示的曲线，且标识为失真的力谱）也相当平坦，带有少量的衰减，如预期相同。但是需要注意的是，力谱在频率轴的起始段走势如同尖钉，这看起来像是不正常的。明确不希望出现这样的现象，这个现象出现的原因可能就是你询问的有关这次测量问题的原因。但这需要作进一步地调查。

现在让我们返回到时域信号，并对测量到的信号作一些调查分析。首先检查力传感器的信号是否合适和电学方面是否出现问题（如检查传感器的饱和程度、连接导线和电池等）。

通常，FFT 分析仪可以设置成几类时域采样模式，可在示波器上查看时域信号以确认设置。只要出现了合适的信号，就可以对信号进行 FFT 处理了。

时域信号看起来合适，但是有个问题需要明白：测量数据是否已经施加了某种窗函数。基于这个特定分析仪的窗函数设置，似乎没有为力信号施加任何窗函数。但是响应信号可能需要加窗。然而，很多时候，多数 FFT 分析仪设置面板上力信号和响应信号施加窗函数的标签令人感到相当迷惑。多数情况下这些标签是合理的，但是分析仪软件使用这些标识，可能会令用户不清楚窗函数的使用情况。

在本例中，标识力信号不需要施加任何窗函数，FFT 分析仪上相应的力通道上的标签类似于：“**只需响应加窗**”。这样分析仪上的这个标识就令我感到迷惑。这个标识可能意味着“只需要在响应通道施加一个窗函数”，或者意味着其他什么意思？当然，我们应该打开分析仪的用户手册，查阅有关这些特定窗函数配置的章节。但很多时候，用户的典型想法是可能认为他知道分析仪面板上所有按钮/标识的意义，因为过去他经常使用其他类型的 FFT 分析仪，非常熟悉分析仪的使用，因而认为没必要阅读这个用户手册。另一方面，有些时候用户手册本身也让人感到迷惑。查看用户手册，经常会让我比查看之前更迷惑。

因此，通常我都采集一种非常简单的方法，即“按键盘打字”方法。也就是选择改变其中一个参数，而其他的参数保持不变。在本例中，首先检查冲击力锤，确保力传感器没有损坏，换用另一个力锤是最简单的检查方法，并且连同导线和信号调理一起检查。

接下来检查 FFT 采集系统设置。分析仪测力通道的窗函数设置为“**只需响应加窗**”。响应窗函数也可以改变，但我们的第一印象是输入力谱不需要加任何窗函数。起初，响应窗函数设置成汉宁窗，这显然是不正确的，这可能是分析仪对一些测试，如处理随机类型信号的默认设置。而对响应信号应该是不加窗或者加指数窗。作为第一次检查，选择矩形窗（首先应该这样做，即使最终加的窗函数是指数窗）。这时响应信号与先前观测到的信号相同。

这是不可能的，因为先前施加的是汉宁窗。造成这样的原因是原来先前观测到的信号作为“不加窗”的信号，这是大多数分析仪的默认设置，为了查看加窗后的信号，不得不选择特定的设置。虽然响应信号明显受窗函数的影响，但是这时有趣的观测是**输入通道的力谱同样似乎也受响应通道窗函数的影响**！力谱如图 1 中右边显示的曲线（红色表示的，标识为合理的力谱）。当响应窗函数改变时，输入通道的力谱会发生怎样的改变？

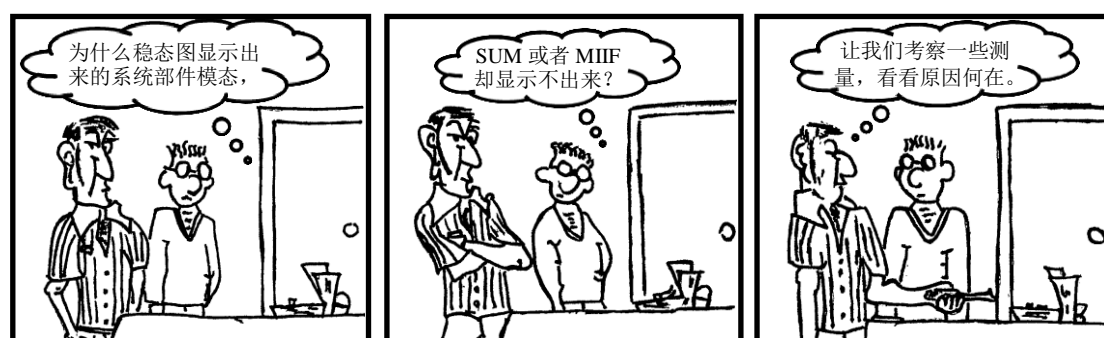
是这个分析仪出了问题吗？你是否应该将这个问题报告给仪器生产商？当然不是！大多数 FFT 分析仪，响应窗函数实际上不仅加在响应信号上，同时也加在力信号上，这样做是为了合理地计算输出与输入之比（通常这样做是为了避免仅对输出响应信号加窗函数引起失真，理论可以证明这一点，但在这儿我们不需要对它进行讨论）。在这，重要的一点是大多数（但不是全部）FFT 分析仪的响应窗函数同时加在输入和输出两个通道上。所以，现在我们能明白为什么最初的力谱会失真了，同时也清楚地明白了“**只需响应加窗**”到底是什么意思了。FFT 分析仪响应通道的最初设置是默认设置，也就是施加汉宁窗。即使只估算力通道，窗函数对响应通道的影响也同样重要。

当使用 FFT 分析仪进行任何测试时，你需要特别小心。你需要确信你十分明白怎么操作分析仪，不同的分析仪具有不同的特征，不是所有的都相同。固然，做一些简单的检查，如这儿做的，能确保你进行的测量是以一种正确的方式得到的。

我希望我已经回答了有关锤击测量的问题。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。

（作者提示：本章节中描述的实验已经用不同的分析仪硬件复现了，以展示在这次有趣的测量中本质上观测到了什么。这不是要陈述有关硬件使用的问题，而是提醒测试工程师需要注意他们所使用的特定的 FFT 分析仪硬件的功能。）





为什么稳态图显示出来的系统部件模态，SUM 或者 MIF 却显示不出来？  
让我们考察一些测量，看看原因何在。

这儿要讲的东西要多于你提出来的这个问题。我猜想你进行了一次模态测试，但是测试过程中没有测量系统所有模态上显著活跃的结构部分。

现在我来说明一下我上面所指的是什么意思。很多时候进行一次模态测试，仅仅只测试结构感兴趣的部分，因此没有人希望花太多的时间去测试超出实际需要测试或者付费的部分。在实验室里经常发生这样的情况。比如，你试图解决汽车地板的振动问题，你首先想到的可能是你不需要测量汽车的排气系统，因为你仅仅对汽车地板感兴趣。

当你仅对底板进行测试时，在测试地板过程中汽车的其他部件并没有与汽车地板相分离，这就意味着测量得出的 FRF 反映的是整个系统的响应。当然，承认地板上的大多数 FRF 主要是底板的响应引起的，但这同时也受系统其他部件的影响，并且这些部件的响应在 FRF 中可以观察到。这些其他部件的响应可能不那么强烈，但它们仍然存在。因此，测量汽车地板的同时也受汽车其他部件的影响，比如排气系统、座椅系统等等。从 FRF 中完全分离出这些其他部件的响应是不可能的。除非将底板从结构中裁剪出来，并且单独进行测量，但这时地板的模态就不可能与安装在汽车上的模态具有相同的边界条件了，因此单独测量地板的模态不可能真实地反映出实际系统的响应。

这个问题在对任何类型的结构进行实验模态测试时都可能遇到。它可能存在于汽车地板测试过程中，也可能存在飞机机身结构模态中，如研究颤振，当只对机翼模态感兴趣，以及其他一些测试等等。这儿不可能列出所有可能的情况。但是毫无疑问，这是一个普遍性问题，对每个结构进行模态测试都可能遭遇到这个问题。



图 1 带加强筋的平板结构

为了说明这个问题，走进实验室对一个现有结构进行一次模态测试，此结构的特点是具有多阶局部模态，仅有几阶整体模态和因筋与筋的连接问题而存在非线性行为。这是一个典



型的结构，我经常用它解释说明像你提出的这类问题。图 1 为这个结构的实物照片，安装了一些用于测试的激振器。这个结构由一个刚度非常大的外部框架和一块弹性非常大的平板组成，由一排夹子连接固定。注意到激振器仅对外部框架结构进行激励，初次测试时，加速度计也只安装在外部框架上，起初没有测量平板的响应，因为不直接关心平板（或者假设不关心内部平板的响应）。

图 2 为一个激振器作为参考点的驱动点测量。注意到 FRF 有 3 个清晰的峰值，而其他一些模态特征却不明显。

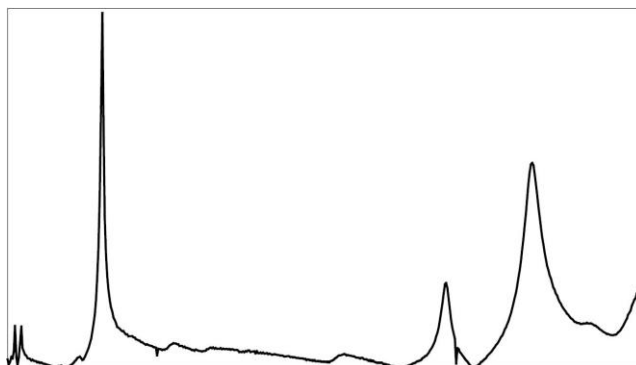


图 2 框架结构的驱动点测量

现在仅考虑框架的 FRF，相应的稳态图，如图 3 所示。注意到图中极点相对稳定的个数多于 3 个。SUM 函数和 MIF 函数明确地指示了 3 个峰，但是其他的峰却没有清楚地指示出来。因此，似乎稳态图能识别出的模态阶数要多于 SUM 函数和 MIF 函数显示的阶数。

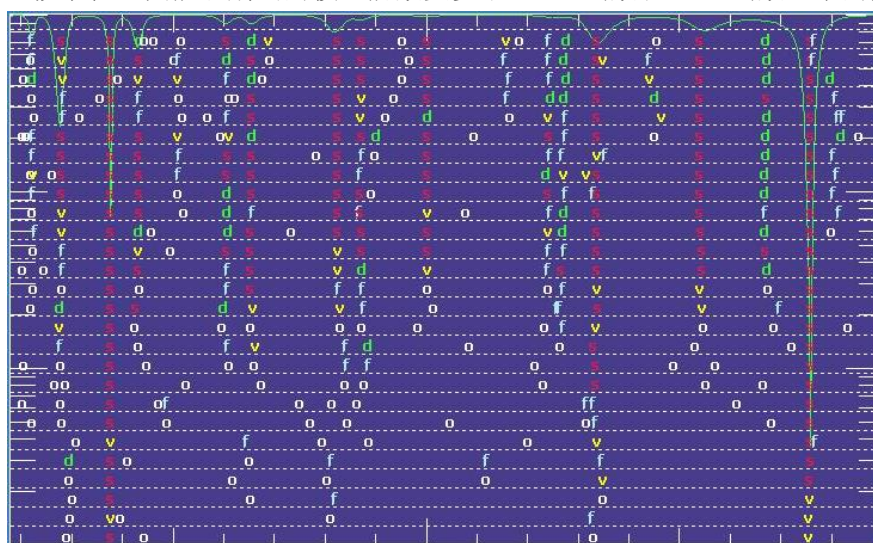


图 3 框架 FRF 的稳态图和 MIF 函数

现在问题在于结构有更多的模态可以轻易地由结构的外部框架部分得到，平板也有多阶模态，虽然这些模态对框架部件的响应贡献非常小，但是它们的影响已经体现在只测试框架的 FRF 中。也就是说，系统的极点可以从稳态图中得到，即使 SUM 函数和 MIF 函数根本没有显示出这些信息。

现在让我们进行另一组测量，这些测量包含测量平板的响应。图 4 为平板上一个驱动点的 FRF。注意到图中 FRF 的峰值多于先前图 2 中驱动点的 FRF 的峰值。（注意：这些 FRF 显著地受连接点和非线性特性的影响，即使这样，这个结构对于解释关心局部模态的影响仍然是相当适合的。）

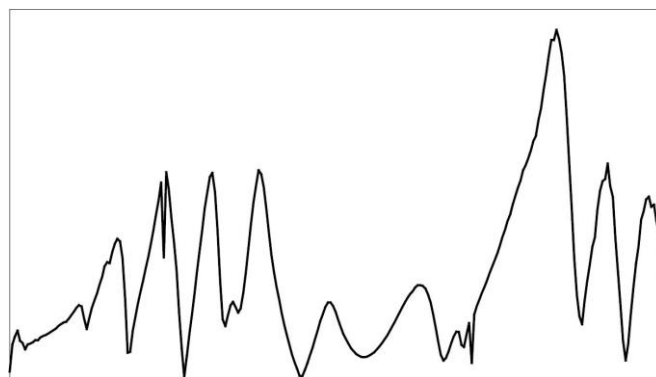


图4 平板结构的驱动点测量

现在稳态图中使用外部框架和平板的所有 FRF，稳态图中同时显示了 SUM 函数和 MIF 函数，如图 5 所示。相对先前的图 3 而言，图 5 更清晰地显示了所有其他阶模态。

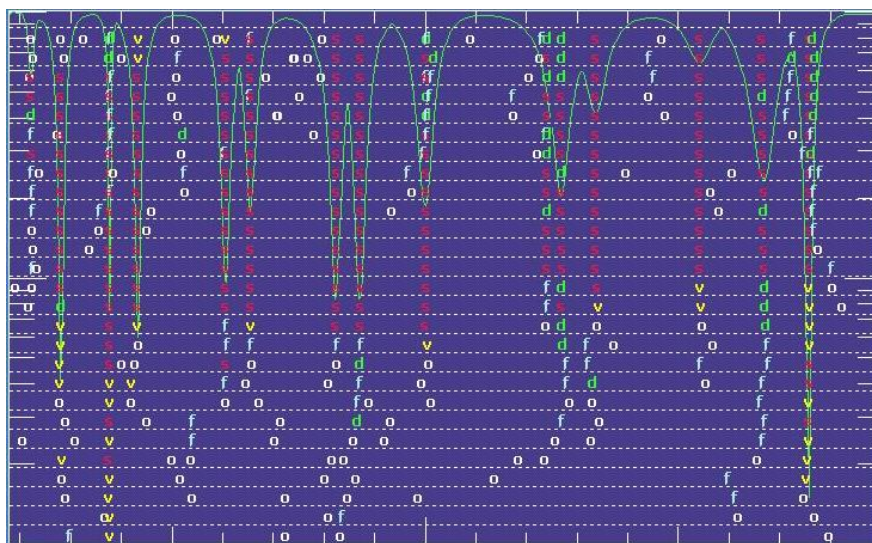


图5 使用所有 FRF 的稳态图和 MIF 函数

因此，有关频带内存在多少阶模态和为什么先前的稳态图没有提供有用的信息，这些问题现在都清楚了。为了使用这些工具（稳态图、SUM 函数和 MIF 函数）解释测量得到的数据，就必须需要足够组数的 FRF 用于充分描述整个结构的动态特性，而不仅仅是直接关心的那部分结构的 FRF。这种情况在工业界很常见，出现的问题只与系统的一部分结构有关（或者是合约中规定的负责任的那一部分结构），因而只测试那部分结构。这样获得的数据也只是问题答案的一部分。如果仅获得全部数据的一部分，那么使用模态识别工具确定模态就会让人感到迷惑。为了更全面地理解系统的完整动力学特性，很多时候测量的区域往往要大于你“感兴趣的区域”。

我希望我已经回答了有关稳态图的问题。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



有时锤击力如预期一样光顺，但经常出现振荡，为什么？

让我们考察一些测量并探讨这个。

很多时候进行锤击法测试时，力脉冲都是规则的半正弦脉冲形状。锤击力信号的时域波形首先从零开始，然后是脉冲，最后再返回到零。然而，很多时候力脉冲在半个正弦脉冲末端出现围绕零值发生振荡现象。为什么会出现这种现象？是否可能是由连击引起的？是否需要加窗函数以最小化这个影响？

要回答这个问题，需要涉及到很多方面，在这一篇文章中不可能全面覆盖到这些方面。这个现象称为“滤波器振铃”。让我们进行一些简单的测量去说明这个经常出现的问题，仅仅通过一些简单的测量，就可以观测到这个效应，用这些简单测量实例能更方便地理解与说明这个问题。

许多 FFT 分析仪，使用过程中都遇到过这个问题。在这儿进行的测量与讨论，我打算使用通用的 BRAND XYZ 牌 FFT 分析仪。用力锤和响应加速度计对一个典型结构进行一次典型测量，然而，在这仅讨论锤击力。它们当中的一些力脉冲形状非常规则，与我们在教科书里看到的一样。但是其他一些力脉冲在时域脉冲末端出现了振荡现象，宛如单自由度系统的响应。这个现象经常被称为“滤波器振铃”现象。这是由位于模数转换器（ADC）前端的模拟抗混叠滤波器引起的。力脉冲激起了模拟抗混叠滤波器本身的一些固有频率的响应，而这些响应出现在力脉冲时域波形中，这是出现振铃现象的真实原因。力脉冲激起不同的频率范围依赖于使用激励结构的锤头，这一点每个人都明白。

但是问题就出在这，依赖于选择的频率范围（带宽），可能导致使用的分析仪出现或者不出现滤波器振铃现象。在考虑 FFT 分析仪内部工作原理之前，表面看来这似乎是不合理的。通常，FFT 分析仪制造商在分析仪内部安装了不同组数的抗混叠滤波器，一组为低频工作，一组为高频工作。如果你测量低频带，低频滤波器就会工作。如果使用软锤头，那么将不会显著引起滤波器振铃现象。但是如果使用稍微硬一点的锤头，那么锤头激励的上限频率范围可能将激起低频的模拟抗混叠滤波器。滤波器本身被激励，相应地将产生动力学响应特性，并在力脉冲波形中体现出来，这就是滤波器振铃现象。

因此，让我们进行一些测试，用于说明滤波器振铃特性，并且明白设置不同的频率带宽对观测到的滤波器振铃有何影响。在这将使用四种不同硬度的锤头，设置两组不同的频率范围。四种锤头分别为非常软的红色气囊锤头、中等硬度的蓝色塑料锤头、较硬的白色塑料锤头和金属锤头。每种情况下，锤头锤击结构便获得一条时域力脉冲波形。在一组测试中，设置频率带宽为 400Hz，另一组测试中，设置频率带宽为 1600Hz。下图中显示为这两组不同带宽、不同锤头锤击得到的力脉冲时域波形。两图从顶部到底部，分别对应的锤头由最软到最硬。

注意到 400Hz 带宽内，随着锤头从软到硬，滤波器振铃现象越来越明显。这是因为越硬的锤头能激起更宽的频率范围，这样硬锤头激起低频抗混叠滤波器响应的可能性大大提高。

比较 400Hz 和 1600Hz 的带宽，滤波器振铃有明显的变化：1600Hz 带宽几乎没有任何滤波器振铃现象。二者唯一不同之处是选择的带宽不同。

400Hz 的带宽

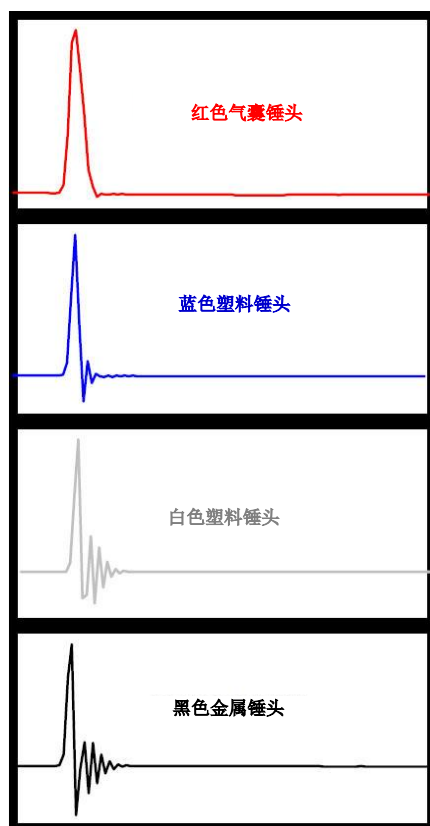


图 1 锤击设置 400Hz 的带宽

1600Hz 的带宽

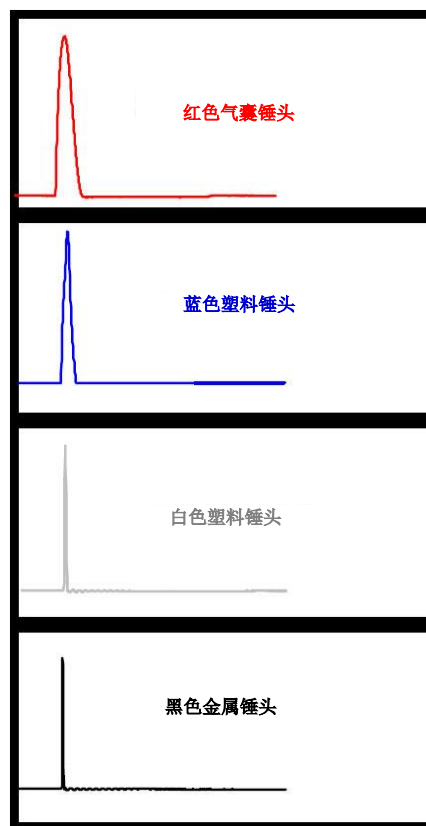


图 2 锤击设置 1600Hz 的带宽

对于这个特定的 FFT 分析仪，两组抗混迭滤波器的使用情况依赖于选择的带宽。显然，当在低频范围使用较硬的锤头时，滤波器振铃现象会更明显。这是因为较硬的锤头能量更多地分布在较高的频段，这个高频能量能激起滤波器的动态特性。同时注意到使用较软的锤头几乎不会出现滤波器振铃现象。

通常，选择更软的锤头是更合适的选择，以能确保不出现滤波器振铃现象。如果出现滤波器振铃现象，那么选择更宽的频率范围将有可能最小化滤波器振铃现象。这样它就不再是一个严重的问题了，并且通过设置更宽的频率范围也达到解决问题的目的。

我希望这点讨论能使你明白有关滤波器振铃现象在力脉冲时域波形中出现的原因。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





激振器测试简单的梁结构，但一些模态看起来不正确，为什么？

让我们考虑与激振器顶杆相关的一些问题。

激振器进行实验模态分析时，如果不关心激振器和它的附属设备的安装可能会引起一些特殊的问题。激振器的附属设备通常称为“推力杆”或“顶杆”。系统典型安装如图 1 所示。顶杆的作用是沿顶杆轴向激励结构，使结构产生沿顶杆轴向的运动，通过力传感器测量这类拉压载荷的大小。

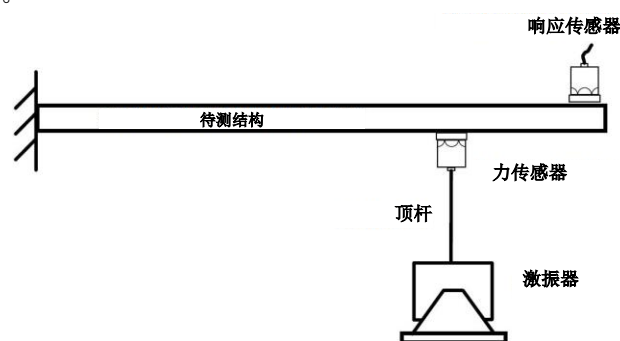


图 1 激振器的典型安装

顶杆的作用是沿轴向激励结构，最小化作用到结构上的横向载荷。本质上，通过受力分析，我们可以知道在连接点处作用到结构上的力的大小。因此，处于测试状态下的结构的动态特征不包括激振器系统和顶杆的动力效应。至少理论上这是成立的。当然，这是假设顶杆没有横向刚度，并且对系统总的动态特性没有任何贡献。这一点非常重要，因为力传感器只能测量轴向力的大小，如果出现任何其他类型的载荷（横向载荷或者力矩），那么它就不可能测量到这些载荷。

接下来描述进行的测量（这个测量由他人提供）。如图 1 所示，对一根弹性相当大的梁进行激振器测试。然而，因为顶杆相对较短，顶杆的转动刚度对梁的弹性模态可能有影响。

让我们先考察已进行的一些测量，图 2 显示的 FRF 是由长度非常短的顶杆作用在结构上得到的。那么长度非常短的顶杆引起的转动刚度的影响将更显著，特别是对于测试下的柔性梁。模态测试得到的前两个峰为梁的经典第 1 阶和第 2 阶弯曲模态。然而，接下来的两个峰却显示为两个本质上相同的梁的经典第 3 阶弯曲模态。得到的 FRF 测量仅仅是对处于测试下的柔性梁，而不是对顶杆进行测量。

接下来的测试（包括对顶杆本身进行的测量）揭示出那两个峰值实际上是由调谐的减振器效应引起的。实际上，顶杆与结构的第 3 阶模态振型同相位，与结构的第 4 阶振型反相位。

力传感器仅仅能测量激振器使结构产生轴向运动的力，没有测量与梁的转动刚度有关的转动效应，该转动刚度由顶杆引入。但在连接位置，相对于梁而言，顶杆看起来像一根转动的弹簧。

为了确认观察到的现象，在第二次测试时使用了一根更长的顶杆。长顶杆有效地减少了作用到结构上的转动刚度效应。图 3 显示的为长顶杆得到的 FRF。明显长顶杆得到的 FRF

更清晰、干净，并且符合梁模态响应的预期模式。简要的模态调查表明前三个峰对应于悬臂梁的前三阶经典模态。

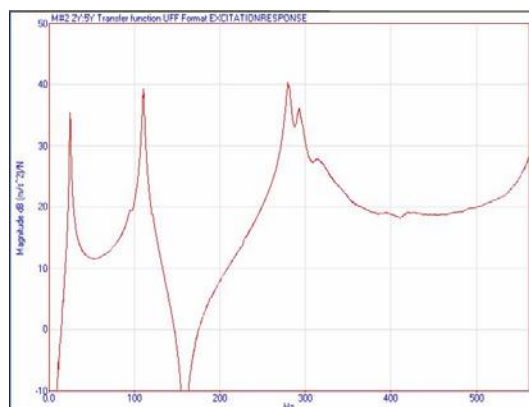


图2 短顶杆得到的 FRF

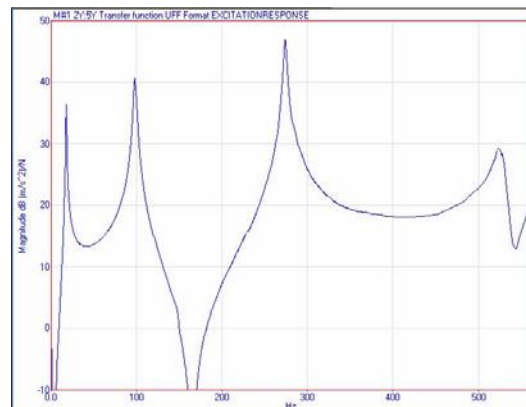


图3 长顶杆得到的 FRF

显然，因配置的顶杆不同，结构前两阶模态所对应的频率有明显的移动。引起频率变化的原因多种多样，可能是质量载荷的影响、顶杆的影响和不同的测试设置的影响等等（这些 FRF 是由他人提供的，因此我不确定实际的测试设置，但频率移动是非常明显的）。两图中第三个峰截然不同。由于调谐式吸振器的应用，可以清晰地观察到这个主峰有分叉，测量得到的响应幅值也明显偏小（见调谐式吸振器理论）。

对于测量系统而言，如果顶杆扮演了调谐式吸振器的作用，那么得到的振型将如图 4 所示。（再次，这些测量也是由他人提供，在这用于说明这儿存在的影响）。显然，顶杆越短，顶杆在连接点处作用到结构上的转动效应将越明显。如果碰巧顶杆与被测结构的某阶频率相同，那么耦合将明确产生如图 2 所示的 FRF。

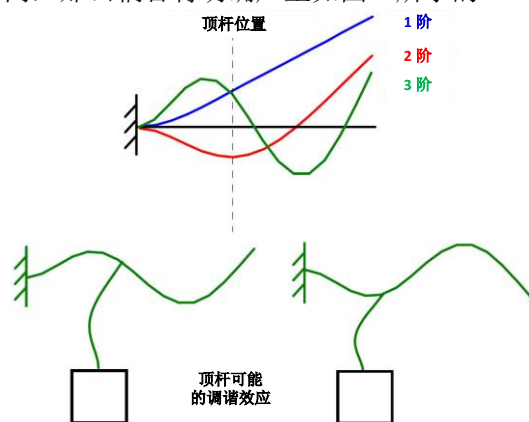


图4 顶杆起调谐式吸振器作用

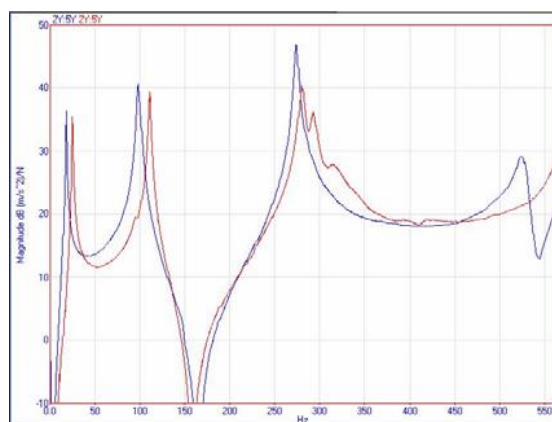


图5 比较 FRF

（注意：图 4 中振型没有缩放；草绘振型是为了显示顶杆转动刚度与被测结构的耦合效应）

显然，激振器顶杆的长短对于精确测量 FRF 起到了非常重要的作用。如果顶杆太短，那么会起到横向刚度加强的效果，这一点在频响函数中也能体现出来。对于这个例子，轻易就可看出太短的顶杆产生了通常的调谐式吸振器效应。这个调谐式吸振器效应在每个顶杆装置应用中可能不会都出现，但在这次测试中出现了。

图 5 为长、短顶杆得到的两个 FRF 的重叠图。比较这两个 FRF，表明两种长度不同的顶杆测量得到的系统模态明显存在差异。

我希望这点讨论能让你消除对激振器顶杆的一些疑问。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





锤击法测量带宽应与感兴趣的频率范围相匹配吗？

让我们探讨这个，明白为什么不需要匹配。

这个问题似乎表面看起来简单，但随着讨论的深入，你可能会意识到有关这个问题的一些方面会使你产生不同的思考。表面上看，测量带宽似乎应该超过感兴趣的带宽。

显然，如果带宽比较窄，那么感兴趣的高阶模态可能观测不到。当然，如果带宽太宽，那么得到的高阶模态的响应可能不是我们所感兴趣的。现在问题在于：后一种情况不希望出现或者可以选择更宽的频率范围，能得到等价的或者更理想的测量吗？呵呵……在最终回答这个问题之前，需要进行一些探讨与评估。

考虑对一个典型结构进行测量，结构的前两阶或三阶模态是我们感兴趣的。估计结构的前三阶模态位于 800Hz 的带宽内。一次典型的测量频率范围为 800Hz，频率分辨率为 1Hz，如图 1 所示。

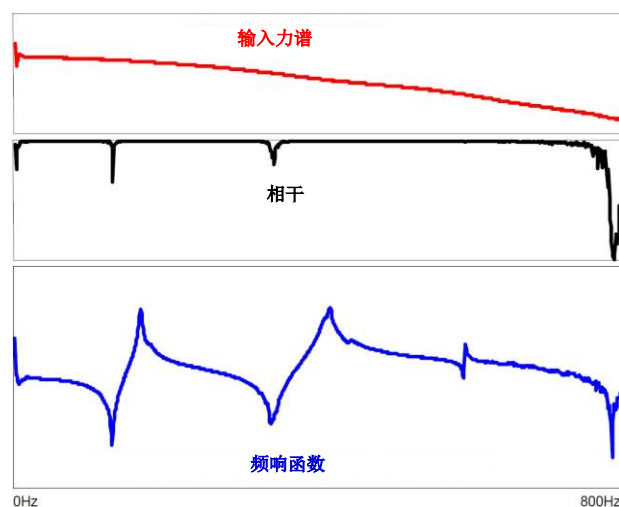


图 1 800Hz 带宽内的力谱、相干和频响函数

大体上，测量看起来是合适的，得到的频响也清晰地显示出了希望得到的峰值，因而似乎测量是可接受的。力谱在整个频带内相当平坦，有近 20dB 的衰减。相干在感兴趣的大多数频率处也相当理想（查看图 1，虽然很难看出相干在整个频率范围内，甚至在共振峰处都有较小的下落，但是对于大多数工程师而言，这个结果可能仍然是可接受的）。

因此，此次测试过程中，什么地方可能出现了问题？让我们考虑与系统响应相关的时域信号。注意到响应时域信号在时间样本的 1/4 内就充分衰减了。实际上这就是问题所在，但表面看来却不是，而这个正好是我想问的问题。我能进行一次更理想的测量吗？怎样做才能得到更理想的测量？

考虑图 2 所示的时域响应，这种可能性非常大：响应通道存在的任何噪声可能在测量得到的频响函数中都非常显著（对于这个例子，这儿没有任何噪声。但是如果有，那么频响函数和相干的质量都会降低）。



图 2 800Hz 带宽内的时域响应信号

让我们为此次测量考虑不同的频率带宽。对于接下来的这次测量，我们对时域响应信号进行优化，使时域响应占时间样本或者数据块的绝大部分。如果将频率范围扩大四倍，那么时间样本长度将为原来长度的 1/4，如图 3 所示。注意到图中的时域响应已占时间样本的绝大部分。

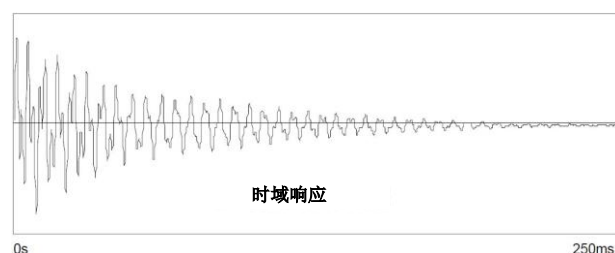


图 3 3200Hz 带宽内的时域响应

现在考察相应的力谱、相干和频响函数，如图 4 所示。初看起来，整个频率范围内的测量似乎看起来不是很理想。但是对于前几阶模态感兴趣的频带而言，此次测量的确相当理想（再次仔细查看图 4，发现相干同图 2 一样理想，但整体欠佳）。

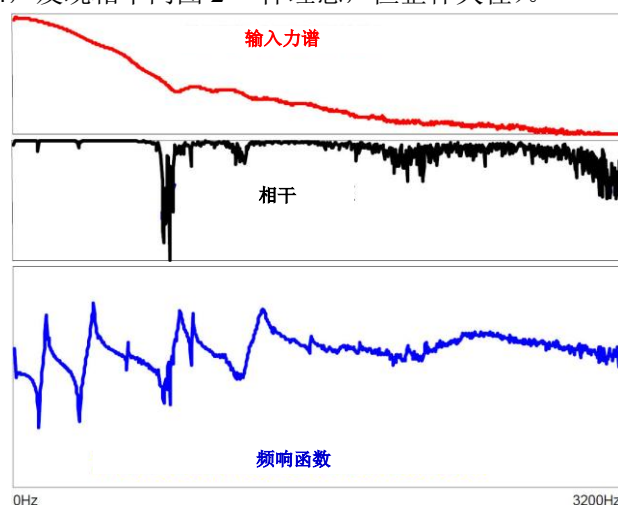


图 4 3200Hz 带宽内的力谱、相干和频响函数

因此，本质是，实际上可能首选第二次测量，依赖于测量得到的响应和相干。进行这样测量的技巧是选择**仅能激起感兴趣频带内模态**的锤头，而不是 FFT 分析仪的整个带宽。这样一来，就可以为感兴趣的模态获得理想的测量。

我曾经在一些不同的测量情况中偶然遇到过这个问题。通常，人们迷惑为什么这样的测量可能是可接受的，但是随着我们探讨的深入，答案变得越来越明朗，即宽带下的测量确实要优于窄带下的测量。

几年前对某航空器的监视分离舱进行过测量，其中的一些测量涉及到这个问题。开始仅在指定的窄带范围内进行测量，这个频率范围内噪声明显，因为响应在时间样本内迅速衰减。再次选择更宽的频率范围之后，响应信号显然占满了整个时间样本，实际上为感兴趣的模态产生了更优的测量结果。再次，选择的力锤仅能激起感兴趣的模态，而不是 FFT 分析过程

中的整个频率范围。图 5 所示的为这个结构的一条典型的频响曲线（不幸的是，窄带的 FRF 没能用于此次比较，但总的来说，窄带的 FRF 是一次较差的测量结果）。

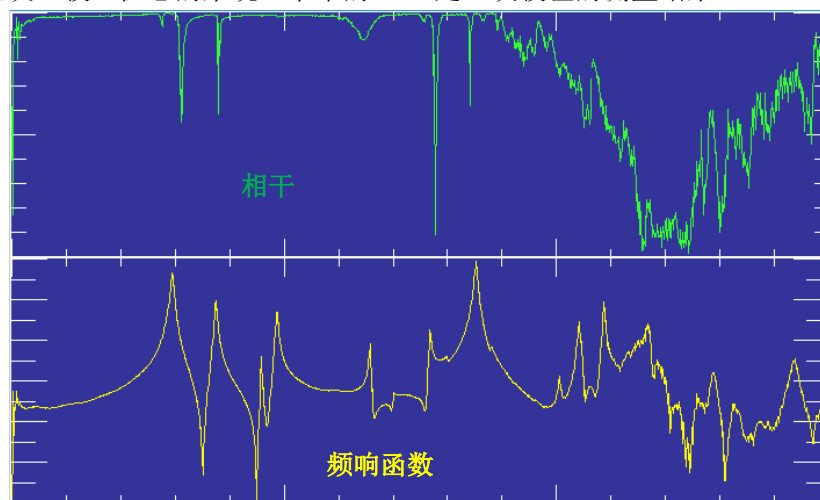


图 5 分离舱的 FRF 和相干

我希望这一点讨论能让你明白通过选择不同的方法能改善测量结果。任何一次测试，在按照特定的方案进行测量之前都需要作出判断，以确定哪种方式下的测量是最理想的。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



大阻尼模态在测量的 FRF 中不可见时，还能提取到这些模态参数吗？

让我们来探讨一下，用实例加以说明。

多年来我多次听到这个问题，答案是有喜也有忧。当然，你能够从 FRF 中提取到大阻尼模态！但是你必须知道在 FRF 中有根存在，并且确保你进行的是高质量的测量，以便能提取到这个根。让我用一个实例来详细说明这个问题，以表明模态参数提取算法功能强大，用于提取大阻尼模态的根非常合适。

为了说明这一点，我采用沿用了多年的一个简单模型。模型为简单的 2 自由度质量-弹簧-阻尼系统，且阻尼为非比例阻尼。系统的运动方程与质量、阻尼和刚度分别定义如下

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{F}(t)\}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 646.225 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 428400 & -132900 \\ -132900 & 532800 \end{bmatrix}$$

用这些矩阵提取复数形式的参数（频率、阻尼和振型）。另外，综合出来的频响函数用于模拟一组采集到的数据。在这个例子中，只有一个参考点，为第一个自由度，产生频响函数矩阵的第一行，如图 1 所示。非常明显的是在频响函数幅值曲线图中只能观测到一阶模态。如果仅仅考虑频响函数的幅值，那么似乎系统只有一阶模态存在。但是如果我们考察相位，那么有迹象表明在感兴趣的带宽内除了显示出来的一阶模态之外，还有一些其他东西（实际上，这个例子中的这个带宽内有两阶模态）。

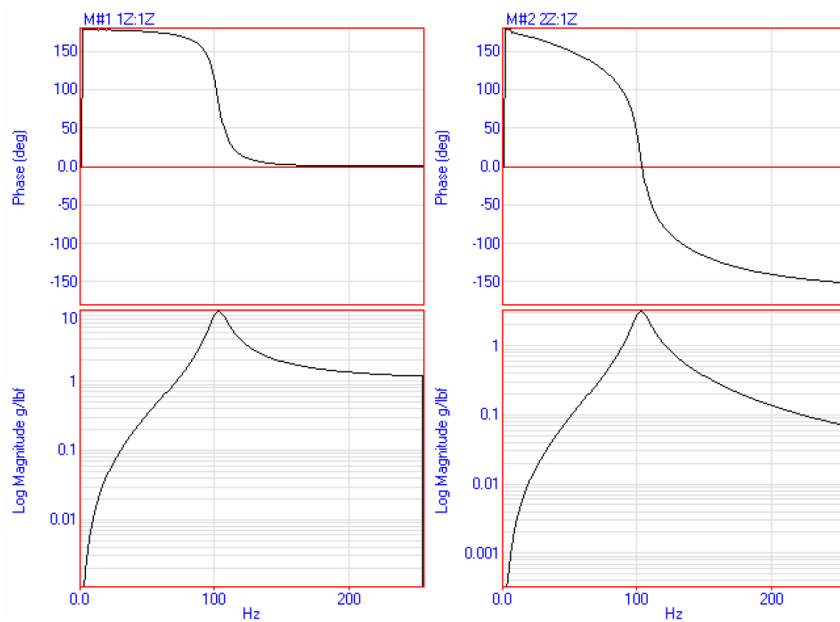


图 1 频响函数矩阵的  $H_{11}$  和  $H_{12}$

但是最大的问题是：模态参数估计算法能提取到准确的系统留数值吗？作为用户，必须为提取留数确定合理的模态阶数。如果只确定一阶，那么显然只能估计出一阶，并且可能是为众多根中的这一个根提供边缘估计。如果为模型指定的阶数过多，那么结果同样也可能失真。可能这儿为一阶或两阶模态估计是合理的，但它们同样有可能是较差的估计。

现在如果为模型指定了合理的阶数，那么能得到正确的模态参数吗？使用正交多项式估计算法（该算法许多商业软件都使用）拟合两自由度模型，提取到的极点如表 1 所示。

表 1 正交多项式提取到的极点

Mode	Frequency (Hz)	Damping (%)
1	103	5.31
2	103	40.7

这些极点是前面描述的非比例阻尼模型的系统矩阵通过复数形式的特征值求解得到的。由这个表可以看出，在同一频率处有两个根，但阻尼不同，分别为 5% 和 40% 的临界阻尼，而 40% 的临界阻尼是非常大的阻尼。现在继续进行分析，用类似的方式提取留数。用  $H_{11}$  和  $H_{12}$  提取到的留数分别如表 2 和 3 所示。这些留数与分析出来的留数非常吻合，而分析出来的留数是从分析模型中得到的，这些留数用于生成频响函数。

表 2 由正交多项式得到  $H_{11}$  的留数

Mode	Frequency (Hz)	Damping (%)	Res Mag (g/lbf-sec)	Res Phs (deg)
1	103	5.31	745	183
2	103	40.7	108	21.8

表 3 由正交多项式得到  $H_{12}$  的留数

Mode	Frequency (Hz)	Damping (%)	Res Mag (g/lbf-sec)	Res Phs (deg)
1	103	5.31	257	107
2	103	40.7	309	306

从这个实例可以清楚地看出，由一条频响函数曲线就可以提取到这些模态，且与系统的阻尼大小无关，不管是小阻尼还是大阻尼，不管是比例阻尼还是非比例阻尼。我们非常清楚，模态参数估计算法是能力强大的曲线拟合方法，当今大多数的商业软件普遍采用。问题不在于曲线拟合方法，而在于测量的数据和使用软件的工程师。

显然，工程师需要一些指示，即在给定频带内根的个数，不论是由模态指示工具中得到，还是根据经验确定在给定频带内的根的个数。虽然曲线拟合对于确定根的个数通常是非常有效的，但我发现模态指示工具，有时不能为给定频带内根的个数提供一个清楚、明确的指示。并且经常，一组较差的 FRF 是不会考虑用来提取模态参数的。很多时候问题取决于实际测量得到的 FRF。通常，实测的 FRF 用于提取准确的模态参数的信息不充足，大多数情况都是如此。

另一种情况是结构具有相当大的阻尼和有伪重根。图 2 所示的模态指示工具清楚地帮助我们确定模态的个数，提取到的根如表 4 所示。包括这个例子在内，都表明所有的指示工具在模态参数估计过程中必须联合使用，有助于确定模态参数。这些测量是高质量的测量，才能保证准确地提取到模态参数。

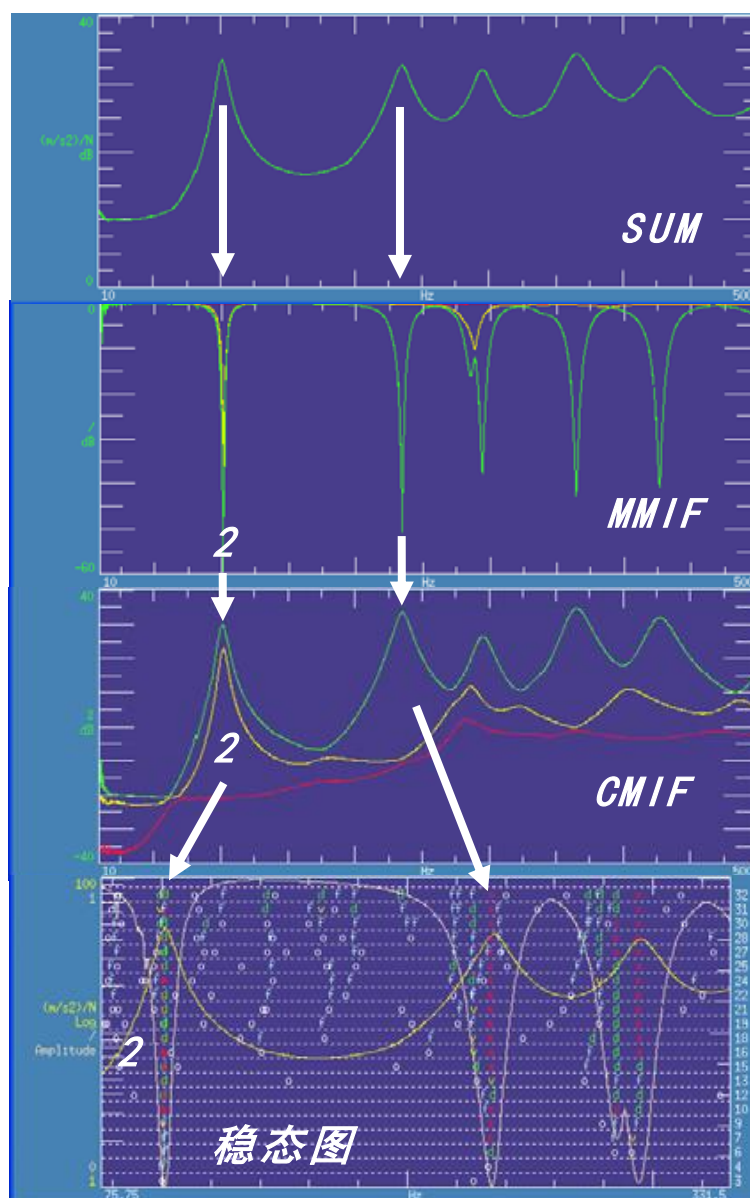


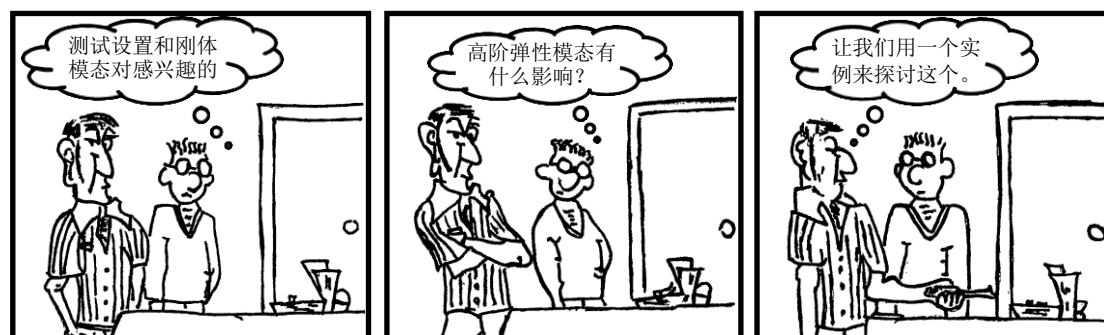
图 2 指示工具 SUM 函数、MMIF 函数、CMIF 函数和稳态图

表 4 时域多参考点模态提取

No.	Frequency	Damping	Stab.	DOFs	Stored
1	101.08 Hz	3.95 %	s	0	no
2	101.62 Hz	3.29 %	s	0	no
3	234.55 Hz	3.20 %	s	0	no
4	285.65 Hz	2.88 %	s	0	no
5	294.90 Hz	2.90 %	s	0	no

我希望这一点讨论有助于让你明白对大阻尼和伪重根进行的模态参数估计过程。倘若获得高质量的测量，模态参数估计算法用于提取这些根是非常出色的，但是得到高质量的测量是关键因素。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





测试设置和刚体模态对感兴趣的高阶弹性模态有什么影响？

让我们用一个实例来探讨这个。

这个问题经常出现。在这个特定的情况中，问题的提出与一个航天器地面振动测试（GVT）有关。关心的问题在于如果使用不同的边界支承条件，将怎样影响系统测量的弹性模态。

有关这个，需要回答一些重要的问题，虽然回答所有这些问题远超过这篇文章的篇幅，但是在这至少能描述一些基本概念和一些可能途径，这将有助于深刻理解这些问题。

为了说明这一点，我想展示最近采集到的一些数据，该数据是在实验室里对一些复合平板样件进行锤击法测试得到的。测试的主要目的是使用一个新的材料公式确定复合材料的阻尼，并且将这些结果与商业上通常使用的复合树脂材料进行比较。

首先要做的是对第一块平板原型设置不同的测试设置条件，以确定是否测试设置条件对测量结果有显著影响。因为平板是一个非常轻质的结构，所以考虑多种不同的测试设置条件。在这儿仅给出了四种不同的设置，用于说明因测试设置条件的不同可能导致的一些差异。用一个非常软的弹性系统支承该复合平板，使用三个参考加速度计的多参考点锤击技术对其进行锤击法测试。分别对四种不同的支承条件进行锤击法测试，如图 1 所示，其中实物照片为一种设置下的测试照片。图 2 所示的为一种支承条件下得到的一条典型频响函数曲线（仅用于作为参考）。

使用正则化模态提取程序处理数据，前四阶模态结果如下表所示。除了第一阶模态以外，其余的三阶模态似乎都相当一致。因而这说明不同的测试设置，得到的结果确实存在差异。除了第一阶模态频率变化达到 5% 之外，其余三阶模态的频率变化都小于 1%（我们可以认为是纤维的排列方向和其他因素造成的，但结果是它们的确有差异）。

需要着重注意的是刚体模态（RBM）显著低于系统的第一阶弹性模态（仔细查看图示的 FRF 可以看出，刚体模态频率接近 1Hz）。这意味着系统的第一阶弹性模态频率和刚体模态频率之比远大于 10:1。但是同时注意到系统的第一阶弹性模态明显受支承条件的影响。

每个人都认为只要系统的第一阶弹性模态频率与刚体模态频率之比大于 10:1，那二者之间就没有影响。但事实上那却赖于你同意“足够接近”的具体含义。在这个例子中，如果你愿意接受 5% 的频率变化，那么我们可能同意这个系统的刚体模态对弹性模态“本质上”没有影响，在这个例子中二者频率之比为 40:1。但是你需要确认这一点，你需要让人们同意这个结果是可接受的。这事实上依赖于你的数据精度，从一种情况到另一种情况、从一个行业到另一个行业和从一种测试设置到另一种测试设置，总是存在变化。

对于复合平板的这四种情况，进行了多次模态测试，仔细对比过所有的测试结果。但是，不仅仅对比频率，也对比模态振型可以确定由测量到的不同数据组引起的一些变化。因此，你需要检查频率和模态振型。

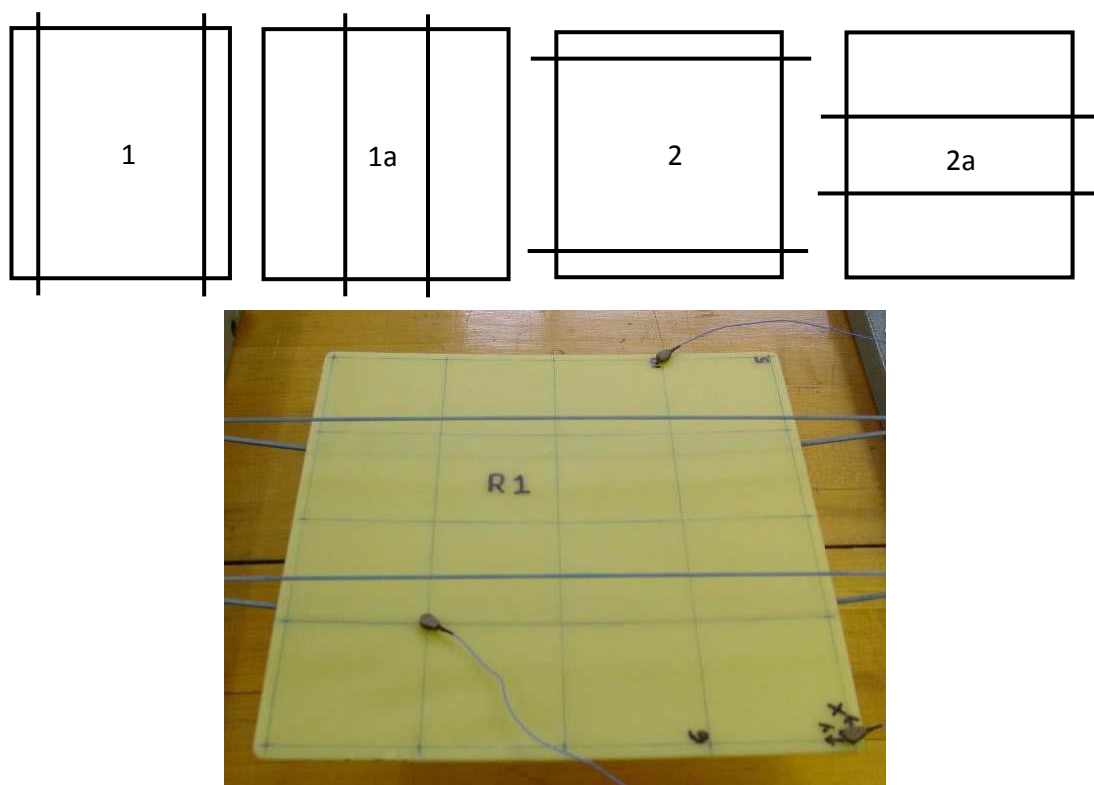


图 1 复合平板的四种支承示意图

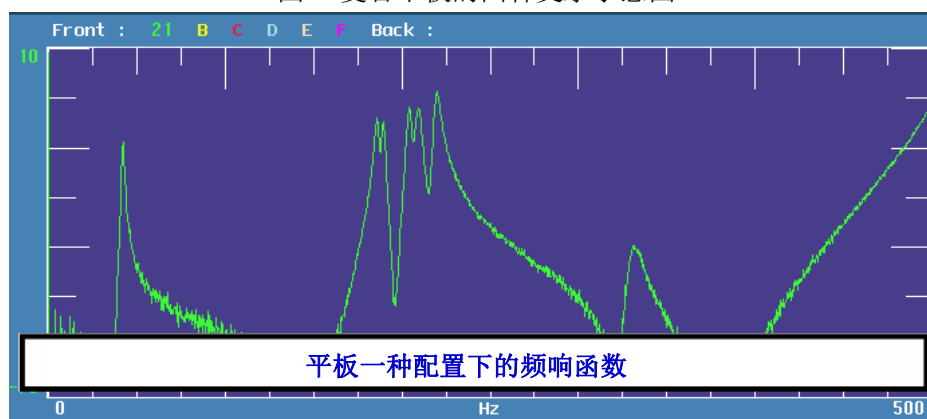


图 2 复合平板一条典型的 FRF 曲线

测试 1#的结果（外侧支承）

Mode	Frequency(Hz)	Damping(%)
1	43.89	2.15
2	188.48	0.92
3	203.24	0.71
4	207.88	1.03

测试 1a#的结果（内侧支承）

Mode	Frequency(Hz)	Damping(%)
1	42.03	2.33
2	188.02	0.91
3	204.00	1.81
4	209.72	1.09

测试 2#的结果（外侧支承旋转 90 度）

Mode	Frequency(Hz)	Damping(%)
1	43.97	2.19
2	188.51	0.91
3	203.01	0.75
4	209.73	1.05

测试 2a#的结果（内侧支承旋转 90 度）

Mode	Frequency(Hz)	Damping(%)
1	42.11	2.32
2	188.47	0.92
3	203.97	0.82
4	209.88	1.07

必须对采集到的数据进行检查,以确定因不同的测试设置条件引起频率和模态振型将怎样变化。可能模态振型是感兴趣的参数,其差异并不明显。或者,对于处于评估状态的设计而言,频率可能是个敏感参数,这严重依赖于实际应用。

因此,你该怎样做呢?如果有分析模型可用,那么研究不同边界条件下的频率和振型的影响是件非常容易的工作。通过使用相关性工具能轻易地评估每种情况,以确定频率和模态振型的影响。这样的分析可在实际测试确定这样影响之前进行,如果有任何影响,那么就可以观察到。这样一来,就可以对模态特性的预期变化做一些估计,通过分析可以确定这些模态特征的变化可能怎样影响最终的系统响应。如果影响显著,那么需要仔细评估支承条件的影响。但是如果系统响应结果差异不大,那么可以认为测试支承条件的影响不关键。但是需要有人去做这样的评估。要使用经验法则,必须做更深入地评估,不能盲目地跟随。需要记住的是测试支承刚度的改变**必然**对所有模态频率有影响。如果增加刚度,频率必然变大,问题是频率变化有多大、是否影响严重或者是否可衡量。

我希望这一点点讨论有助于让你明白测试设置条件对频率和振型的影响。你需要仔细评估这些影响。如果你还有模态分析其他问题,请咨询我。



模态测试用 2KHz 进行激励，但只分析到 500Hz，是否有问题？  
让我们来探讨一下。

这是个非常有趣的问题，需要讨论与此相关的一些方面。首先，更重要的问题可能是为什么有人会想以这种方式进行测试，然后讨论一些方面，这些方面可能对总测量有影响，最后考虑一些可能的替代方法。

让我们考虑如图1所示的测量，正如提出的问题一样，这次的测量频带覆盖2KHz，而分析带宽只到500Hz。

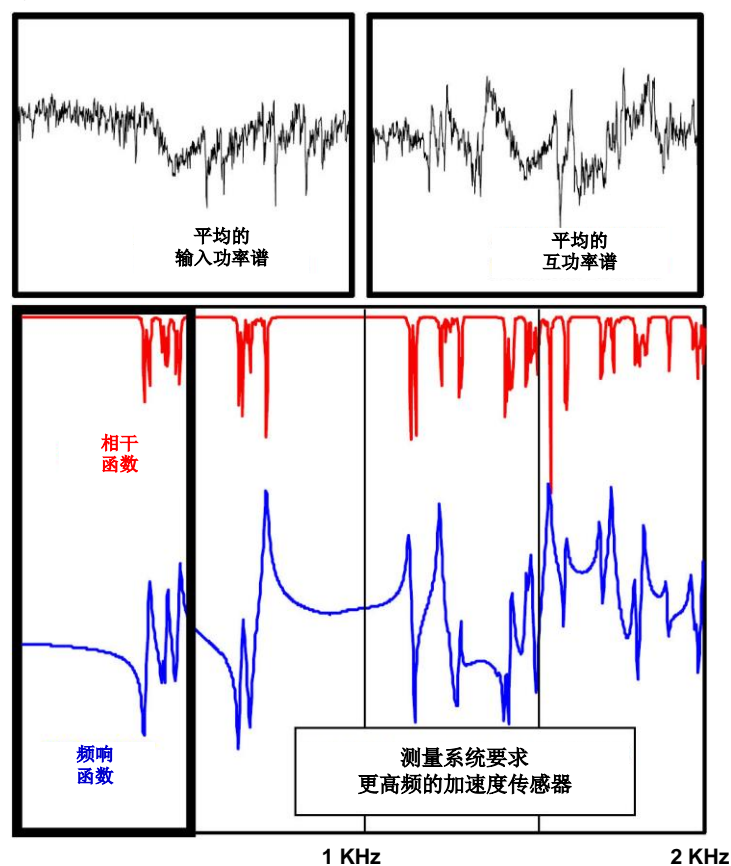


图1 测量覆盖2KHz，但只关心500Hz

这真的没有正确或错误的回答，但是有关这次测量的充足性我深有感触。要不是涉及具体细节，我真的不愿意按要求进行这样的测量。考察输入功率谱、互功率谱、频响函数和相干，可以看出这次激励和响应都明确达到2KHz。在高频范围内有相当大的响应，并且存在多阶模态。这次测量看起来总体是可接受的，但是在感兴趣的500Hz频带内，它真的是最佳的测量吗？

首先要考虑的是激励频率远超过500Hz，为什么只提取500Hz以内的模型信息。也许，分析或者设计可能只考虑低阶频率。可能开发的模型，设计方面只需要考虑到200或者400Hz

以内的响应，因而没有必要考虑高频的贡献。那就意味着高阶模态参与系统总响应不显著，可以将这些高阶模态排除在分析频带之外。

如果情况是这样的，那么激励没必要延伸到高频段。可能的情况是激励来自于工作激励，在这种条件下输入激励是宽带激励，能激励较宽的频率范围。但是，因为是工作激励，那么可能认为这种激励方式优于人工生成的激励，但这明显存在争议。

这样测试可能有双重目的，虽然你的分析只关心分析到500Hz，但是有可能其他人员需要为其他一些应用使用和分析这些数据到2KHz。当一次测试数据用于多重目的与分析时，这总是个问题。这样测试不是最佳的测试方法，但考虑时间方面因素时，完全有可能这样测试，如当生产计划紧凑，测试对象不能长期使用，或者硬件价格昂贵时。无论如何，进行这类测试可能具有多种理由。

但是什么因素可能影响总的测量，这需要考虑采集数据使用的传感器。如果激励超过500Hz（达到2KHz），那么选择的传感器必须适用于这个频率范围的响应。当然，这意味着选择的加速度计要适合高频段，这样，相对于专门用于测量低频的加速度计而言，这个加速度计可能对低频段不敏感。因此，关心的问题在于合理地选择传感器，要求在500Hz以下能提供合适的测量，并且高频激励时该传感器不能过载或者达到满量程。这样可能导致传感器选择不合适。

另一个问题，激励频率达到2KHz将产生高频响应，这些高频响应可能不是我们感兴趣的，或者可能会引起其他问题（如非线性），可能会降低测量数据的总体质量。我的优先选择是仅在感兴趣的频率范围内进行测量，如图2所示。

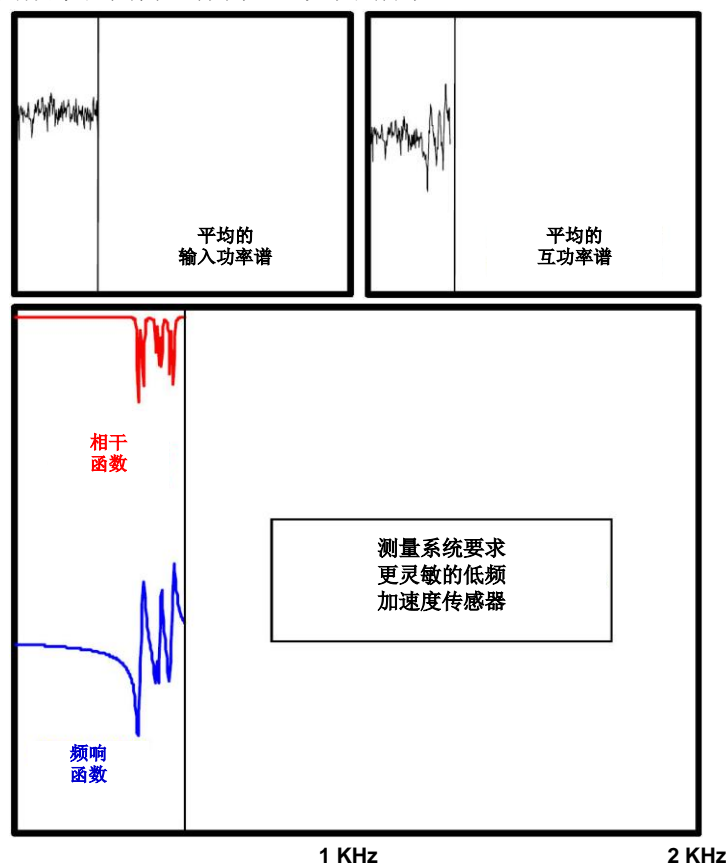


图2 频率激励到500Hz

似乎使用低通滤波器限制激励频带是一种更明智的方法，这样就不会激起系统的高频模态。这样允许我们使用更灵敏的低频加速度计，提供质量更高的总测量。这同时也使得数据采集系统的模数转化器的使用更合理。但是原则是必须同时考虑测试仪器和与它们相关的信号调理。传感器多余的负载没有任何意义。为什么要激励和测量不关心的部分呢？

考察这次测量，有可能关心500Hz到1KHz内模态的贡献。如果没有测量它们，那么在将来某个时候，出于某种原因可能需要估计超过本次测试要求的部分。考虑如图3所示的带宽，你可能会发现这儿有一些明显占主导地位的模态，这些模态可能是一些感兴趣的模态(可能不是今天，可能是明天)。因此你要明白，对选择多宽的频率范围合适，常常没有一个明确的答案。但是有一点是明确的，那就是选择的传感器对实际测试的频率范围需要非常灵感，这一点在测试之前就需要考虑好。

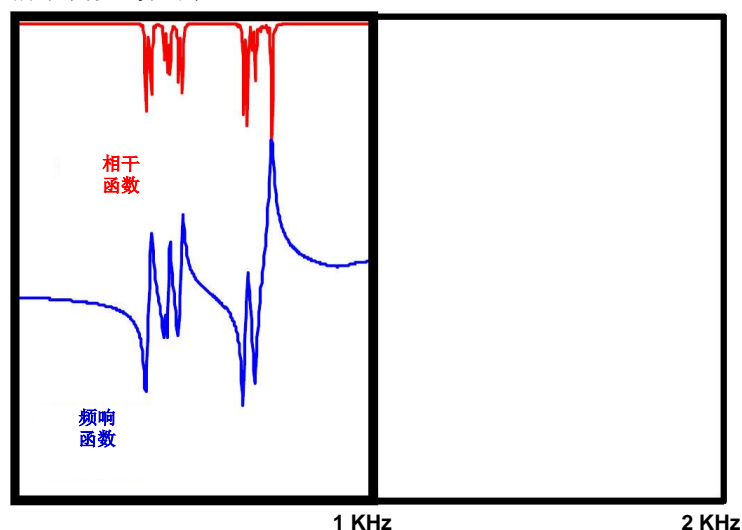
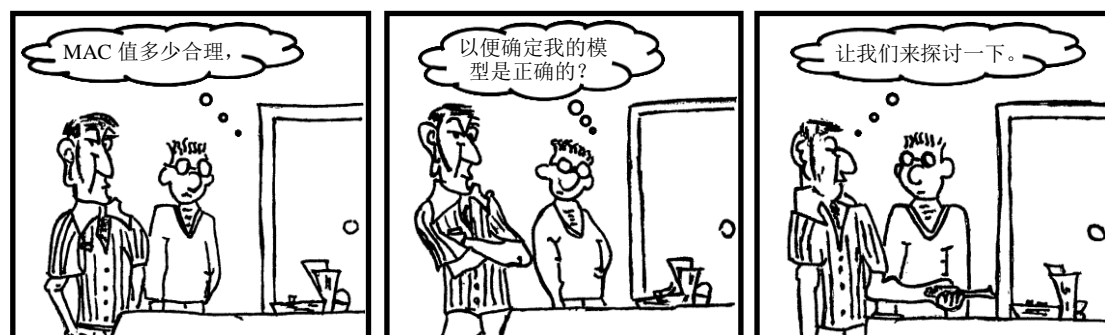


图3 测量响应到1KHz

因此，如果我被迫进行一次用2KHz激励，只分析到500Hz的模态测试，我该怎么办？可能最佳的测试方式是一次测试用2KHz激励，第二次测试用500Hz激励。如果上面讨论的所有问题都合理考虑，那么两次测量应该提供等同的信息。如果我被迫用2KHz激励结构，那么我愿意进行两次测试，分析这两组数据，以确定是否两次测量存在任何明显的差异。当然，这仍然还是要求测试仪器对两个频率范围都要适合，但对于低频段而言，可能不是最合适的。

我希望这点讨论有助于你明白数据采集远超出感兴趣的频率范围所带来的影响。如果要求这样做的话，也可以这样测试，但是这样做可能存在一些问题，与选择合适的传感器能准确测量到感兴趣的实际频带有关。你需要仔细评估这一点。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





MAC值多少合理，以便确定我的模型是正确的？  
让我们来探讨一下。

这个问题需要太多的讨论，人们经常对MAC（模态置信准则）和其他一些常用的相关性工具感到迷惑。在这仅讨论几个方面，以澄清一些概念上的误解。

出于讨论目的，我们假设有分析模型和实验数据，通过MAC和POC(伪正交检查)检查发现二者已接近完美的向量相关，两者都接近想要的单位矩阵。但是，虽然向量相关较好，但是我们假设频率相关不是太理想，假设第1阶模态频率相差10%，第2阶模态频率仅相差1%。那么这种相关性意味着什么呢？

为了帮助讨论，我们考虑一块普通平板的响应，《模态空间》中先前的一些文章已使用过这个平板例子用于说明一些简单概念。图1所示的为该平板受随机激励引起的响应，图中同时给出了输入-输出的频域表达。

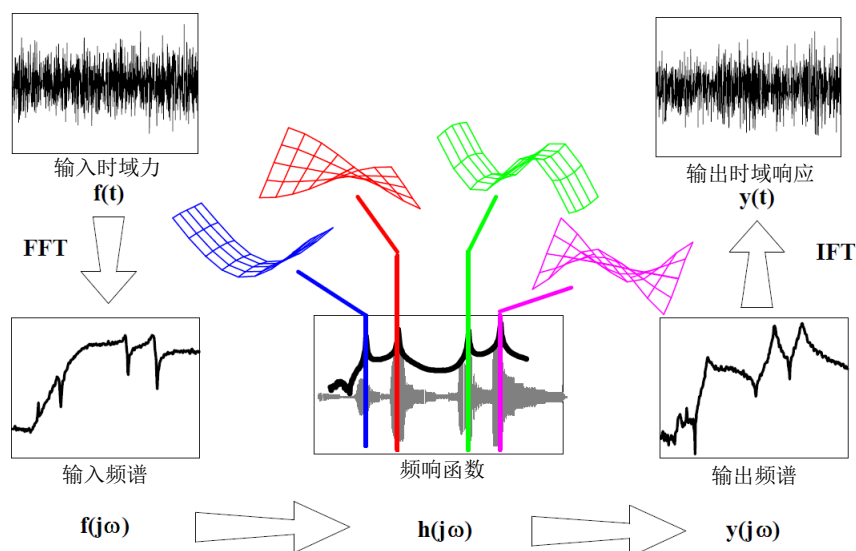


图1 随机激励的总响应示意图

FRF和脉冲响应刚好对输入激励起到了滤波器的作用。显示了FRF，以及在每个共振频率处相应的模态振型。因此我们明白，频率和模态振型对于确定系统响应是非常重要的。虽然振型正确，但是频率差异也重要。

如果频率值不正确，那么系统响应将发生变化，依赖输入力谱怎样变化。在这个例子中，第2阶模态频率非常准确，在第2阶模态区域输入力谱也相当平坦，因此轻微的频率变化只引起系统响应轻微变化。然而，第1阶模态频率有10%的差异。对于这阶模态而言，输入频谱在这个频率范围内有显著的变化。因此，这阶模态频率变化比第2阶模态更重要。

因此，开始变得相当明显了：MAC仅仅是向量相关性的一种指示，它仅确定向量是否相关；对于模型准确预测系统响应是否合适，则不提供任何信息。但是这个向量是怎样影响

响应的呢？理解这个向量对响应的影响的最佳方法是考察基本运动方程。

系统的物理响应方程

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{F}(t)\}$$

$[\mathbf{M}]$ 、 $[\mathbf{C}]$  和  $[\mathbf{K}]$  分别为质量、阻尼和刚度矩阵，连同相应的加速度、速度和位移，以及施加到系统中的外力一起组成运动方程。方程在模态空间可以写成

$$\begin{bmatrix} \backslash & & \\ & \bar{\mathbf{M}} & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \{\ddot{\mathbf{p}}\} + \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & \bar{\mathbf{C}} & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \{\dot{\mathbf{p}}\} + \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & \bar{\mathbf{K}} & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \{\mathbf{p}\} = [\mathbf{U}]^T \{\mathbf{F}\}$$

在该方程中模态质量矩阵、模态阻尼矩阵和模态刚度矩阵是对角阵，上式还有模态加速度、模态速度和模态位移，方程右边是模态外力。注意到力通过模态向量的转置投影到模态空间。因此，模态振型对于确定模态特征至关重要，同样对外力分配到每阶模态振子中也至关重要。

如果模态振型变化，那么载荷的分布（分配到每阶模态振子中）和响应也将随之变化。因此，我们不得不思考将怎样使用模型，更重要的是确定将应用何种类型的载荷，什么样的响应对系统的总性能至关重要。对于相当均匀的宽带随机激励，这些影响通常很小。

现在继续讨论另一种情况，图2所示为带有一些谐波分量的正弦激励。注意激励频率不是系统的任一共振频率。但如果模型的频率是错误的，结果又将怎样？调整激励频率为第1阶模态频率，这时又将怎样？那么这时响应将比预期的要大。

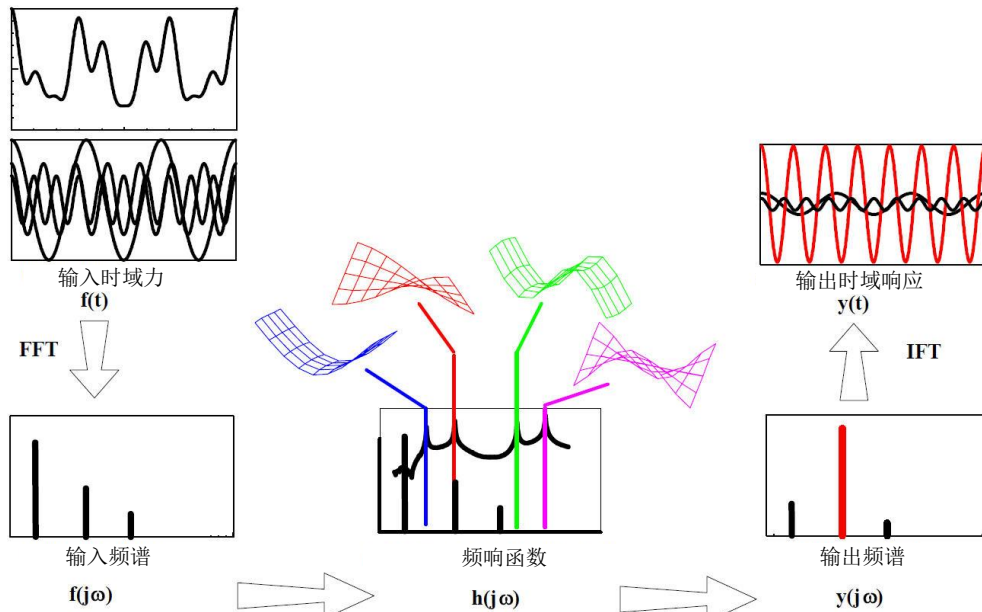


图2 正弦激励下系统的总响应示意图

另一方面，如果模型的第2阶模态频率是错误的，那又会发生什么状况？注意激励频率的一个谐波频率等于系统的第2阶模态频率，这时预测的响应是错误的。

因此，我们不得不着手思考相对于整个模型和模型响应而言，MAC值意味着什么。MAC（和POC）帮助我们确定振型的准确性。但我们还需要思考频率相关性和力函数。

因此，当进行相关性检查时，获得最佳的相关性是非常重要的。但这实际意味着什么呢？需要对预先设计的载荷引起的模型响应作一些评价。然后需要有人确定模型存在多大的变化量和对计算出来的响应有多大的影响。一旦确定了模型中可接受的变化量，那么就能确定频率和模态向量能变化多大。

我们需要认识到这一点，没有任何一个模型是完美的，每一个模型都存在一些变化。设计载荷也存在一些变化（如果我们考虑真实的载荷条件）。因此，在我们定义可接受的相关性大小之前，需要根据系统总响应级别定义哪些是可接受的。如果没有这样做，那么为频率相关性和MAC/POC相关性指定大小都毫无意义。如果任意选择它们，那么对判断模型预测的准确性而言，它们不可能成为一个好的、全面的指示工具。

在实际应用中，可能会有非常严格的要求，即如果载荷对信号的频率非常灵敏，那么第1阶和第2阶模态**必须**具有准确的频率相关性和振型相关性。这在实际应用中是成立的，如旋转设备特定的转速对系统的总响应是非常关键的。可能在一些实例中频率准确更关键，而对模态振型相关性可能要求不那么严格。但是在另外一些应用中，输入是均匀的宽带激励，那么可能频率相关性的要求没有振型相关性要求严格。

这不是用一个固定的相关性规范就能简单确定的。基本事实就是需要确定相关性和可接受的程度作为特定载荷参与下的系统详细分析的结果。没有这些重要的评估，相关性的标准就没有任何现实意义。

当然，如果开发的模型满足相关性的一些基本标准，那么这是非常不错的，但是如果这些一般性的相关性标准得到满足，这并不意味着模型必然会产生精确的结果。

我希望这点讨论有助于让你明白相关性处理和为什么必须使用特定的相关性数值，理解这些与系统响应有一些内在的关联。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



有人告诉我工作模态分析产生的结果更优, 阻尼更真实。  
我们需要探讨一下一些东西。

许多人对这个话题存在疑惑。这些技术功能非常强大, 也能产生非常理想的结果, 但是, 当使用这些工具时, 需要清楚地确定一些问题, 这些问题可能经常被忽略, 如果不能理解这些问题, 那么可能产生非常严重的后果。让我们讨论一些关键因素和一些关心的方面。

过去一些年, 人们开发了许多技术, 能从工作系统中缩减测量数据。这些技术以前称为“只有输出的系统”或者最近更多地被称为“工作模态特征”。这类分析最明显的特征是不需要测量输入力, 利用缩减的数据提取系统的变形特征。这是它的最大优势, 但同时也是它弱势之一。虽然不需要测量输入, 但也不能保证激励系统的输入能激起所有希望得到的系统特征的响应。这就可能导致系统模型定义不能完全确定系统所有的特征, 而只能确定由未测量的或未知的力激励起来的那部分系统特征。

我们以前使用图1说明过结构动力系统的输入-输出问题。在仅有输出的系统中, 只测量输出响应。假设如下: 输入力通常是宽带激励, 能激起一定的频率带宽, 该带宽用于定义系统工作状态特征。然而, 在图1中, 输入力(没有测量)显然没有激起系统所有的低频模态, 而这些低频模态对于全面定义系统的动力学特征可能至关重要。

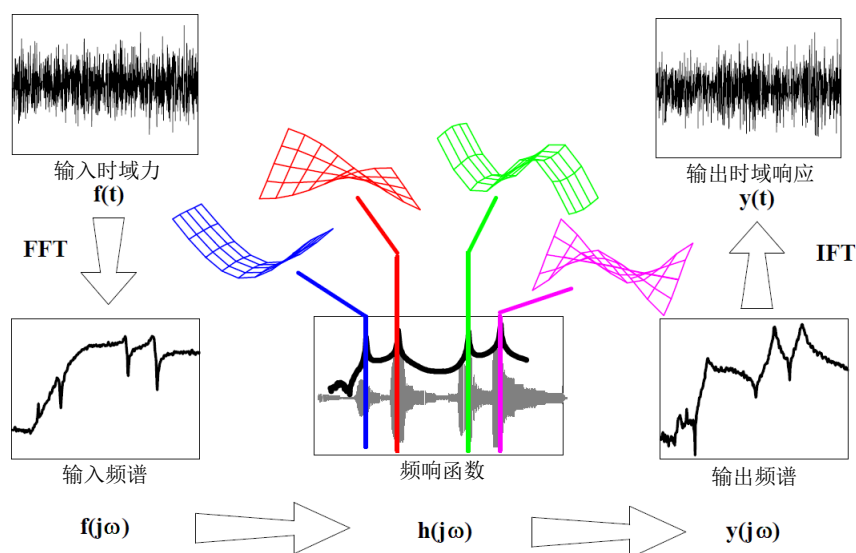


图1 随机激励引起的总响应

只要输入力能真实代表实际作用力函数, 并且不存在其他工作力激起系统低频模态的可能性, 那么这就不是问题。但是, 只有输出的系统的问题在于, 你决不可能知道真实存在的激励力的大小, 对于充分描述系统特征而言, 不知道激励是否已完全激起系统的所有模态。

因此, 此时我们意识到必须关心力函数, 为了充分提取到系统所有的动力学特征, 输入力必须是宽带激励。倘若这一点能满足, 那么系统的所有模态才可能提取到。但是另一个关

心的问题是需要使用一些方法用于缩放这些工作模态数据，使之进一步用于动力学仿真、与有限元模型的相关性检查、强迫响应仿真或者其他一些动力学分析，而这些分析都要求缩放的模态振型。虽然在这个方面已经有了一些研究，但仍然需要继续研究开发有用的技术，能适合范围更广的情况和提供缩放的模态。完全有理由相信，将来肯定能开发出这些工具。

另一个需要讨论的关键问题与系统极点估计有关。虽然频率估计相对容易，但阻尼估计却不那么简单。很多时候我听到人们这样声明：工作模态分析得到的阻尼比传统模态测试下的阻尼更准确。虽然这对于具有非线性特征或者轴承或者其他复杂构造特征的系统而言，是正确的，但事实是，对于线性时不变（LTI）系统而言，所有工作数据的参数提取算法**预测的阻尼似乎都要大于实际存在的阻尼**。

为了说明只有响应输出的数据缩减方案总是产生更大的阻尼，甚至LTI系统也如此，在这儿将提供两个模型产生的结果，一个是仿真工作数据的纯分析模型，另一个是对系统进行实验测试，该实验系统是一个非常线性时不变系统。

对于第一个分析模型，我们假设通过分析能确定这个线性时不变系统的频率和阻尼值。出于研究目的，阻尼指定为2%。在这个线性时不变系统上作用来自于分析导出的随机激励信号，输出响应通过计算得到。由这些时域数据，可以使用一组仿真数据模拟只有输出的测量过程。然后从这组数据中提取系统特征。

进行分析仿真，初始系统的特征和由仿真工作数据提取得到的特征如表1所示。虽然LTI系统的频率和振型与初始分析模型的非常接近，但是注意到从只有输出的系统中仿真计算出来的阻尼大于初始系统的阻尼。显然，这是参数提取过程造成了这样的结果，从只有输出的系统中估计阻尼大于最初的LTI系统中指定的阻尼。

表1 分析模型：指定系统的临界阻尼为2%

最初的分析模型		随机工作响应	
频率(Hz)	阻尼	频率(Hz)	阻尼
9.1	2.0%	9.1	3.8%
32.5	2.0%	32.6	2.3%
60.3	2.0%	60.3	2.3%

第二种情况中，对一块滑雪板进行实验测试，板上没有捆带或其他附加装置。这个系统是一个非常线性的系统，板上没有任何连接点或者其他组件间的相互作用，而这些可能导致系统出现非线性或者出现较大的阻尼。

首先对滑雪板进行一次传统的实验模态测试，估计系统的特征，然后使用一组时域响应（由任意敲击这块滑雪板引起的）模拟工作数据。然后处理这个工作数据，提取得到系统特征。

传统实验模态测试结果和只有输出的结果如表2所示。注意到虽然频率和模态振型非常准确，但是阻尼估计完全不具有可比性。（注意：在这两个例子中，使用通用的商业参数提取算法估计参数，得到模态结果）。

表2 比较滑雪板的传统实验模态结果和只有输出的结果

实验模态结果		只有输出的系统响应	
频率(Hz)	阻尼	频率(Hz)	阻尼
18.1	0.70%	18.2	2.44%
38.9	0.44%	38.8	1.73%
42.1	0.65%	42.2	1.71%
62.4	0.44%	62.0	2.0%
66.8	0.70%	67.5	2.0%

我们知道在这我只给出了两种情况。但多年来，对许多不同结构进行的测试（和分析）

都证实了这一点。虽然不总是这种情况，但迄今为止我见过的大多数情况似乎都是这样。因此在这儿需要注意的重点是，通常只有输出的系统预测的阻尼总是倾向大于实际存在的阻尼，那怕是LTI系统。因此，使用工作模态分析（OMA）结果务必要小心，因为预测的阻尼可能大于系统实际存在的阻尼。

随着时间的推进，这些算法将得到改进，希望它们能提供更接近实际的结果。但与此同时，还是要小心使用这些结果。我希望这点讨论有助于理解工作模态分析（或者只有输出的系统）。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





什么是MRIT? 锤击测试时，我听到人们谈论它。

让我们来谈谈这种测试技术。

MRIT，即多参考点锤击技术，已经使用多年。随着多通道FFT分析仪越来越便宜，在当今实验模态分析测试中使用越来越普遍时，MRIT越来越受到人们的青睐。让我们首先从单输入单输出系统(SISO)的一些基本概念入手，然后更深入地理解FRF矩阵中的一些信息。这将引导我们理解为什么我们对MRIT感兴趣，MRIT是获取多参考点数据的途径之一。

过去，大多数测试人员最多只有两通道FFT分析仪可用，每次采集FRF只能是一个输入输出位置，然后再对下一个输入输出位置进行测量。依赖是锤击测试还是激振器测试确定参考点的位置。

使用一个激振器测试时，激励位置作为参考点，加速度计沿着结构上不同的测点位置“移动”（显然，移动加速度计比移动激振器方便）。一旦获得所有测点的测量数据，那么得到的是FRF矩阵的一列。测量得到FRF矩阵是具体哪一行由结构上参考的激励位置确定。

但是对于锤击测试，可能是“移动”力锤，一个加速度计在某个测量位置保持固定不动。这种情况下，这个加速度计测量位置作为参考点，得到FRF矩阵中的一行。得到FRF矩阵具体哪一行由结构上加速度计的测量位置决定。（但也有可能是力锤保持不动，加速度计沿着结构“移动”。）

不管哪种方式，固定不动的测点称为“参考点”，这是因为这个测点对每个输入输出都是相同的。图1所示的蓝色为激振器测试（或者力锤保持不动的测试）得到FRF矩阵的一列；红色为锤击测试（力锤在结构上移动）得到FRF矩阵的一行。

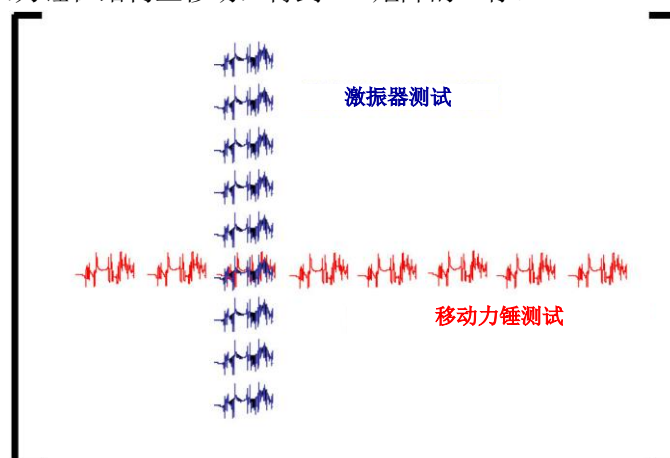


图1 FRF矩阵中典型的行/列

现在我们知道过去的测试方式了，因为每次测试得到的是一个FRF，这样进行模态测试相对简单。但是测试最关键的方面是合理地选择参考点的位置。在这之前，这方面已经讨论过几次，已经很清楚从参考点位置必须能够观测到所有感兴趣的模态振型。对于某一特定模态而言，模态振型与留数的关系如下

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{11k} \\ \mathbf{a}_{21k} \\ \mathbf{a}_{31k} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{q}_k \mathbf{u}_{1k} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{1k} \\ \mathbf{u}_{2k} \\ \mathbf{u}_{3k} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

这对应留数矩阵的一列（要知道留数矩阵是对称的，因此也可以写成留数矩阵的一行）。如果参考点靠近某一阶或者多阶模态的节点，那么测量得到的FRF将不能为提取这些模态参数提供最有用的信息。因此，参考点选择至关重要。然而，如果能得到FRF矩阵的多行或多列，那么就有多余的模态参数提取信息可用。如以前讨论过的一样，完整的留数矩阵定义如下

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11k} & \mathbf{a}_{12k} & \mathbf{a}_{13k} & \cdots \\ \mathbf{a}_{21k} & \mathbf{a}_{22k} & \mathbf{a}_{23k} & \cdots \\ \mathbf{a}_{31k} & \mathbf{a}_{32k} & \mathbf{a}_{33k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \mathbf{q}_k \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{1k} \mathbf{u}_{1k} & \mathbf{u}_{1k} \mathbf{u}_{2k} & \mathbf{u}_{1k} \mathbf{u}_{3k} & \cdots \\ \mathbf{u}_{2k} \mathbf{u}_{1k} & \mathbf{u}_{2k} \mathbf{u}_{2k} & \mathbf{u}_{2k} \mathbf{u}_{3k} & \cdots \\ \mathbf{u}_{3k} \mathbf{u}_{1k} & \mathbf{u}_{3k} \mathbf{u}_{2k} & \mathbf{u}_{3k} \mathbf{u}_{3k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

因此，非常渴望获得FRF矩阵中的多行或多列。多参考点模态提取算法利用多个参考点的多余信息最大可能地提取得到模态参数。注意，我已经提到几次“多余的”这个词，是为了强调它的重要性。但是这些多余的参考点对所有模态而言，有时可能不是最佳的，如果有一个最合适的参考点的话。但现实原因是，万一其中有一个参考点没有位于最合适的位置，那么还有其他的参考点可用，而这些参考点可能包含更理想的模态信息。这就是为什么经常使用多参考点的真正原因。

现在我们明白了拥有多个参考点对于估计模态参数是有帮助的。因此，随着多通道FFT分析仪越来越普遍，同时采集多参考点数据也就越来越可能了。

因此，**多参考点锤击测试（MRIT）**也就应运而生了。通常，通过在结构上不同位置放置多个加速度计作为参考点实现多参考点锤击测试，对于识别结构大多数模态，这些参考点要求是相对合理的参考位置。例如，如果使用四通道FFT分析仪，那么一个通道将提供给力锤使用，其余剩下的三个通道供参考加速度计使用。与普遍做法相反，不是在结构上某点安装一个三向加速度计，而是在三个不同位置安装三个单向加速度计，这样做可能更优（这三个加速度计也不是一个沿x方向，一个沿y方向，一个沿z方向！）。

采用这种策略，每次获得一组平均的FRF，而这些FRF是矩阵中不同三行的三个不同元素。随着力锤从一个测点移动到另一个测点，将得到三个不同的FRF，一旦锤击完所有测点，那么将得到FRF矩阵不同的三行，如图2所示。这个数据采集过程称为多参考点锤击测试，MRIT。

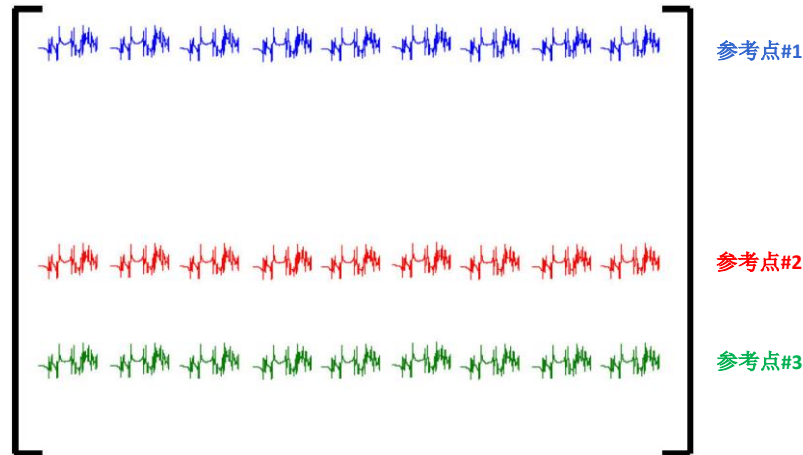


图2 得到FRF矩阵的多行

当使用大型的多通道系统同时测量所有测点的加速度计响应时，MRIT会出现一些变化。如果只锤击一个位置，那么测量得到的是FRF矩阵完整的一列，类似图1所示的激振器测试。当然，如果我们锤击几个不同的测点，那么将得到FRF矩阵的多列，如图3所示。

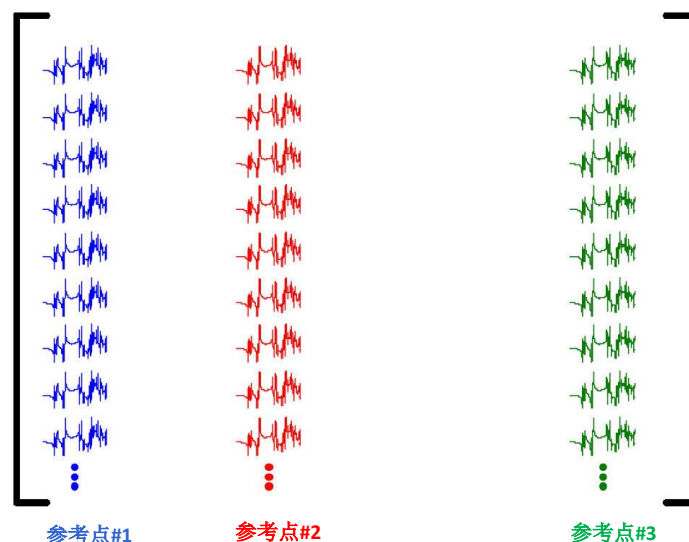


图3 得到FRF矩阵的多列

在以上描述的两种情况中，由MRIT方法得到多参考点数据，这是采集多参考点数据一个非常有效的方法。如果有多通道FFT分析仪可用，我们没有理由不进行MRIT测试。这并不会花太多的时间，而多参考点数据结果是非常有用的。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



所有的模态指示函数有什么不同之处？他们分别起什么作用？  
让我们来讨论这个。

这是个相当不错的问题。模态指示函数非常有用。一些不同的模态指示函数通常在实验模态分析处理数据时用到。让我们来谈谈这些最常见的工具中的每一个，展示它们的优点和缺点，以及每一个工具是怎样解释数据的。

当然，测量得到的频响函数可以看出存在多少阶模态，但只用一条频响曲线时，就很难确定有多少阶模态存在了。使用一条FRF会是个问题，因为在一条特定的FRF曲线中，可能不能激起所有感兴趣的模态。模态可能都具有方向性，由一条FRF曲线可能不容易观测到所有模态。这个问题在驱动点测量中尤为普遍，因为所有的峰值都具有相同的相位关系，空间上非常靠近的两阶模态可能很难识别出来。因此，为了帮助选择系统极点，多年来人们开发了许多不同的工具。现在主要使用的是：

- SUM: 集总函数；
- MIF: 模态指示函数；
- MMIF: 多变量的模态指示函数；
- CMIF: 复模态指示函数；
- SD: 稳态图。

让我们来讨论以上每一个工具。使用一块平板结构作为例子结构，如图1所示。这块平板空间上存在一些密集模态，这些密集模态的存在加重了这些模态指示工具的负担。对这块平板进行MIMO测试，2个激振器作为参考点，15个加速度测量位置。

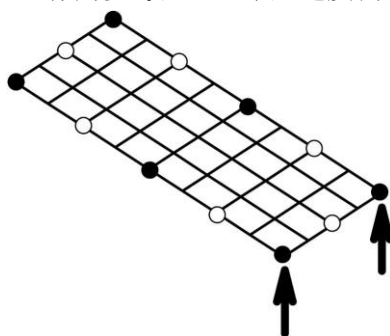


图1 用2个参考点测试平板结构

首先讨论的工具是集总函数，SUM。这是一个非常简单的计算公式。本质上，SUM函数是所有测量得到的FRF之和（有时也仅使用所有FRF的一个子集）。在系统模态频率处，SUM函数将达到极值。SUM函数的基本思想是：如果考虑所有的FRF，那么所有模态在绝大多数FRF中都是可见的。随着包含的FRF越来越多，那么所有模态在所有FRF所组成的集总SUM曲线中都可见的机会就更大。这明显优于某一条FRF，在一条FRF曲线中可能不是所有的模态都可见。

由所有测量的频响函数得到的一条SUM函数，所图2所示。集总函数能合理地识别出各

阶模态，特别是各阶模态分隔较远时。在这个图中，能观测到五个峰，这就表明在显示的频带范围内至少有5阶模态存在。集总函数的另一个重要特征是每个峰都相当宽胖，如果空间上存在非常靠近的密集模态，那么集总函数可能不能有效地显示出这些模态。

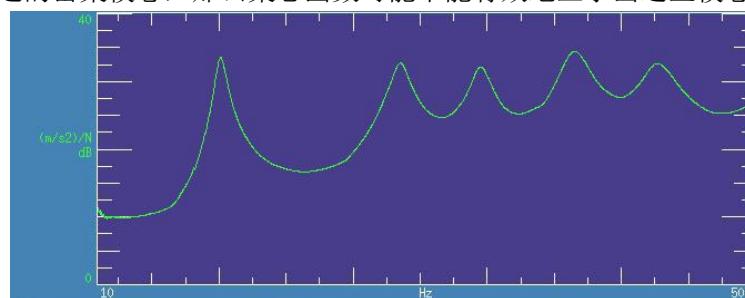


图2 2个参考点和15个加速度测点下的SUM函数

虽然SUM函数非常有用，但是不能总是有效地分辨清楚空间上的密集模态。另一个工具，模态指示函数（MIF），对识别空间上的密集模态更为有效。MIF函数的数学表达式是FRF函数的实部除以FRF的幅值。因为实部在共振峰处迅速通过零位置，MIF函数通常在通过模态频率处发生急剧突变。FRF的实部在共振峰处值为零，因此在模态频率处，MIF函数的值将下降到最小。MIF函数的延伸是多变量的MIF函数（MMIF），它是对多参考点的FRF数据而言的，是多参考点的MIF函数的数学扩展。MMIF函数同样遵循单个MIF函数的基本特征。MMIF函数最大优点是多个参考点数据将具有多个MIF函数（每一个参考点数据对应一个MIF函数），并且能甄别重根。MMIF函数如图3所示。

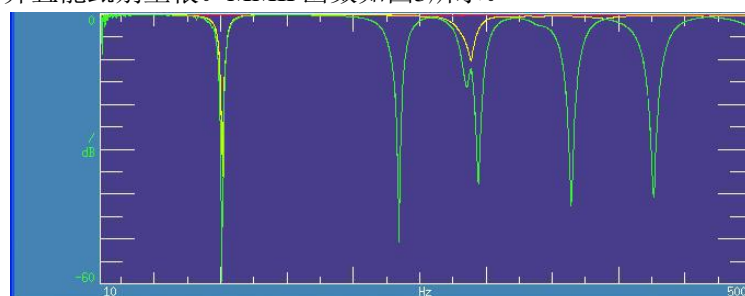


图3 2个参考点和15个加速度测点下的MMIF函数

如果第一个MIF函数出现向下坠落，那么表明这儿有一个系统极点。图3所示的1号MIF函数（图中绿色）的每一个向下坠落处都指示了系统一阶模态。注意这个函数有6个坠落尖峰，比由SUM函数观测到的模态多出了一阶。显然，在300Hz附近有一阶模态与另一阶非常接近，而这一阶模态显然SUM函数不能识别出来。

如果第二个MIF函数与第一个MIF函数同时在某个频率处向下坠落，那么表明这儿有一个重根（或者一个伪重根）。显然，图3所示的第二个MIF函数（黄色表示）在靠近100Hz处第一次向下坠落，这表明这儿有一个重根（注意到SUM函数在这个频率附近只能识别出一阶模态）。然而，第二个MIF函数的另一个向下坠落的小尖峰出现在300Hz附近，但这并不表明这儿存在一阶模态，因为第二个MIF函数向下坠落的频率与第一个MIF函数向下坠落的频率不同。指示重根的两个MIF函数必须在同一个频率处同时向下坠落。

MMIF函数是一个更为准确的模态指示工具。然而，前提条件是FRF的实部在共振处，其值为零。如果FRF测量存在一些失真或者频响函数有一些相位信息（与非实模态或者复模态相关），那么MMIF函数可能不能准确地指示出这些模态。

在这种情况下，复模态指示函数（CMIF）便成为了一个更有效的工具。CMIF函数是基于FRF矩阵的奇异值分解方法确定FRF中观测到的所有主模态。奇异值图也有助于识别系统极点。CMIF函数达到极大值就指明了系统极点。每个参考点存在一条CMIF函数曲线，如图4所示。



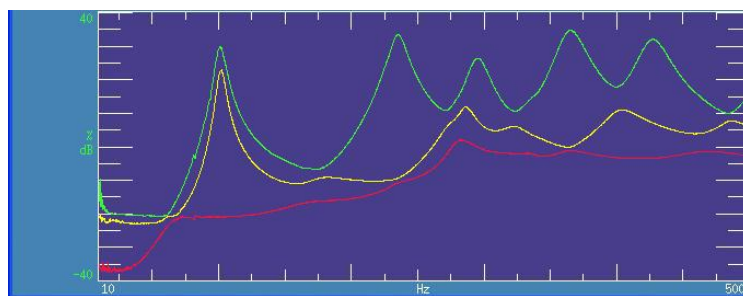


图4 3个参考点和15个加速度测点下的CMIF函数

显然，其中两条CMIF曲线的峰值靠近100Hz，这表明在那个频率处有两个共振峰。在300Hz附近，有迹象表明这个频率附近有两阶模态（或者可能是三阶）。CMIF函数在感兴趣的频带内为确定极点个数提供其他一些额外洞察信息。

所有的模态指示工具在参数提取过程中帮助工程师们选择系统极点。最后一个工具是稳态图（SD）。稳态图的基本原理是，如果极点是系统的全局特征，那么随着阶数的增加，由阶数逐渐增加的数学模型提取到的系统极点将重复出现。随着模型阶数的增加，其他的指示工具不具备这种连续指示的特点。当极点达到稳定后，用图形表征这些特性将对系统极点提供一些额外的洞察。图5所示的为比先前的频带更窄的稳态图。注意到指示出在100Hz附近有一对重根，而另一对重根靠近300Hz（有关稳态图的详细探讨将在将来的某一篇文章中）。因此这能再次确定从MMIF函数和CMIF函数中已经确定的这些极点。

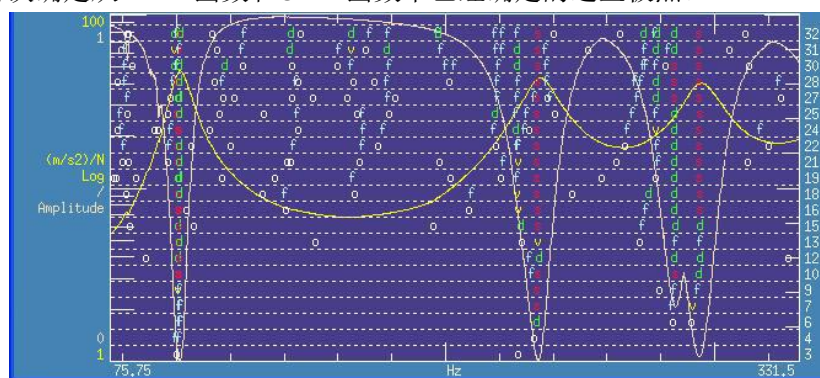


图5 FRF数据的稳态图

还有更多的工具需要讨论，但在这仅解释了模态指示工具的大部分。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





怎样选择模态参考点位置？需要考虑什么？

让我们来探讨一下，明白怎样考虑这一点。

参考点位置的选择是实验模态测试重要的步骤之一。如果参考点位置选择不合适，那么很有可能识别出来的系统某一阶或者多阶模态是一种较差的描述，最坏的情况是这些模态根本识别不出来。很多时候，参考点的选择具有先验知识，如果以前多次测试过相类似的结构。这些情况下，参考点的选择是比较容易的。但是如果结构独一无二，以前没有测试类似结构的经验时，那么参考点的选择就相当困难了。显然，经验知识在这些情形中就非常宝贵了。也可能用分析模型帮助选择合适的参考点位置。因此，让我们讨论一些基础知识和说明选择参考点时一些考虑事项。

首先要说明的是控制参考点选择的基本方程。我总是对我所有的学生讲，“要记住……几乎所有模态问题的最重要答案仅仅是简单的关系式  $u_i u_j$ ”。当然，学生经常因为我再三强调这一点而取笑我，但是他们已经意识到他们大多数模态问题经常用这个关系式就能回答！因此，明白我说这个的意义何在了吧。回想一下留数矩阵

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11k} & \mathbf{a}_{12k} & \mathbf{a}_{13k} & \cdots \\ \mathbf{a}_{21k} & \mathbf{a}_{22k} & \mathbf{a}_{23k} & \cdots \\ \mathbf{a}_{31k} & \mathbf{a}_{32k} & \mathbf{a}_{33k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \mathbf{q}_k \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{1k} \mathbf{u}_{1k} & \mathbf{u}_{1k} \mathbf{u}_{2k} & \mathbf{u}_{1k} \mathbf{u}_{3k} & \cdots \\ \mathbf{u}_{2k} \mathbf{u}_{1k} & \mathbf{u}_{2k} \mathbf{u}_{2k} & \mathbf{u}_{2k} \mathbf{u}_{3k} & \cdots \\ \mathbf{u}_{3k} \mathbf{u}_{1k} & \mathbf{u}_{3k} \mathbf{u}_{2k} & \mathbf{u}_{3k} \mathbf{u}_{3k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

我们不会采集所有的输入-输出组合（理论也告诉我们，不需要测量所有的输入输出组合）。因此，这就需要非常仔细地选择到底测量矩阵中的哪些行或者哪些列。如果我们考虑其中一列，那么我们可以写成

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{11k} \\ \mathbf{a}_{21k} \\ \mathbf{a}_{31k} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{q}_k \mathbf{u}_{1k} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{1k} \\ \mathbf{u}_{2k} \\ \mathbf{u}_{3k} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

显然，对于测量的所有模态而言，模态振型值在参考点处必须非常显著。如果能做到这一点，那么测量得到的FRF将对系统的所有模态都有明显的响应。但是，如果某一阶或多阶模态在参考点处的模态振型值不明显，那么FRF可能不会对系统的这些模态有明显的响应，这将使得模态参数估计变得更困难。

如果有分析模型可用，那么通过查看分析模型的模态振型，能够选择出最佳的参考点位置。一个经常使用的简单工具是驱动点的留数。本质上，这是模态振型描述成留数的一个评估

$$a_{iik} = q_k u_{ik} u_{jk}$$

这是一个通用的工具，用于初步评估，通常称为“预测试分析”。当然，还有其他的工具，比如**模态振型集总**、**MODMAC**、**有效的独立性**，以及在这儿没有讨论的其他一些工具。但是如果没有有限元模型（这是经常出现的）或者有限元模型本身就不正确，那么此时我们该怎么办？因此，我们需要在没有先验知识或者分析模型不能提供有效帮助的情况下，能够合理地选择参考点位置。

因此，经常进行实验性的测试，首先要进行抽样测量，以确定结构可能存在多少阶模态。有时，检查驱动点的FRF，可能是查看FRF的虚部。不幸的是，只查看驱动点FRF可能不是更适合的方法之一。这是因为驱动点的FRF很难识别出非常靠近的密集模态，因为驱动点的FRF虚部的所有峰值都具有相同的相位关系（同正或同负）。事实上非驱动点的FRF更合适，因为虚部幅值有正有负，这就使得识别出密集模态的可能性更大。例如，图1所示的两条FRF曲线，上面是驱动点的FRF，它在第一个峰值处不能识别出两阶密集模态。下面是跨点的FRF，从这条曲线能够明显地识别出在那个频率附近有两阶模态。因此，你能明白驱动点测量是有用的，但是当模态在FRF中显示不明显时，它同时也具有欺骗性。

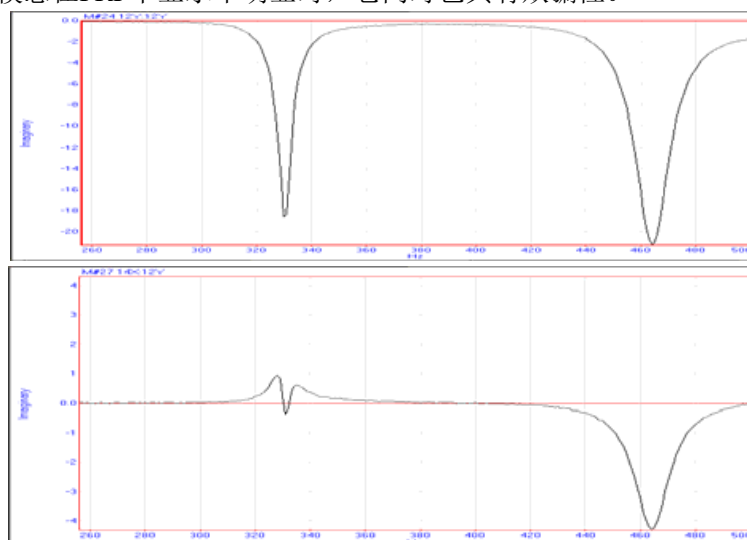


图1 密集模态下的驱动点和跨点的FRF对比

进行模态测试时，经常凭经验和知识猜测进行随机采集FRF，而这些凭经验和知识的猜测是判断哪些测点可能是合理的参考点。图2所示的为随机选择测点测量的FRF，用不同的颜色表示。

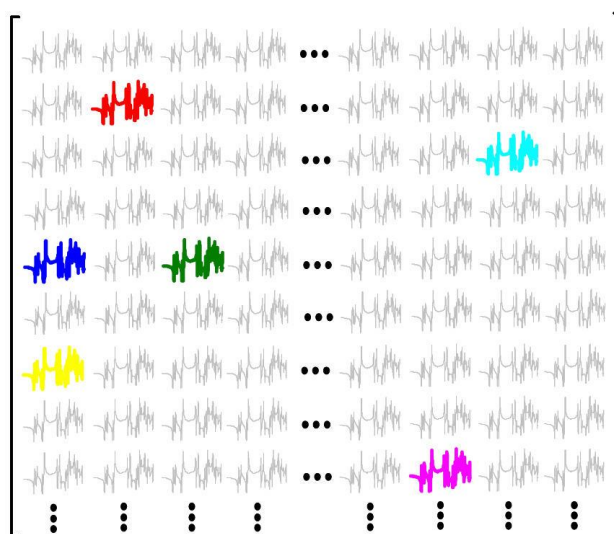


图2 任意选择测量的FRF

一条一条地检查这些随机测量的FRF，确定每条FRF的峰值数目。如果所有FRF的峰值都相同，没有出现额外的峰值，那么可以认为从这些已获得的FRF测量位置中选择参考点是合理的。然而不幸的是，所有的这些测量都是以一种随机方式完成的，那么采用这种方式，丢失关键模态的可能性非常大(我曾经见过经验丰富的测试工程师偶尔也丢失结构的主要模态)。

确定潜在参考点位置的另一个可能的方法是从所有潜在的候选的参考点位置获得一小部分FRF，这个过程获得的部分FRF的示意图，如图3所示。然后对这个矩阵进行奇异值分解(SVD)。通过评估原始矩阵的多个子矩阵的奇异值(比如，以一种可控的方式移除个别参考点)，那么就能确定重要模态的数量。如果每次得到模态的阶数相同，那么对于确定系统模态而言，移除的候选参考点不是关键的参考点。然而，如果只能识别少数几阶模态，那么移除的是一个重要的参考点，因为这些模态在这个参考点被移除后就不能再观测到了，因而模态测试中应该保留这个参考点。

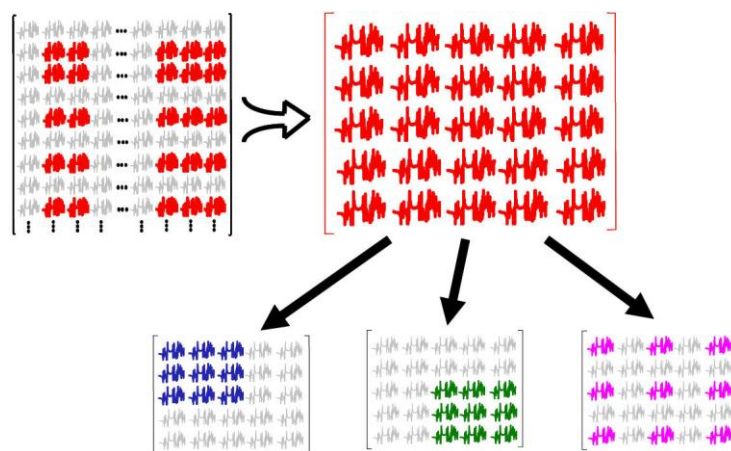


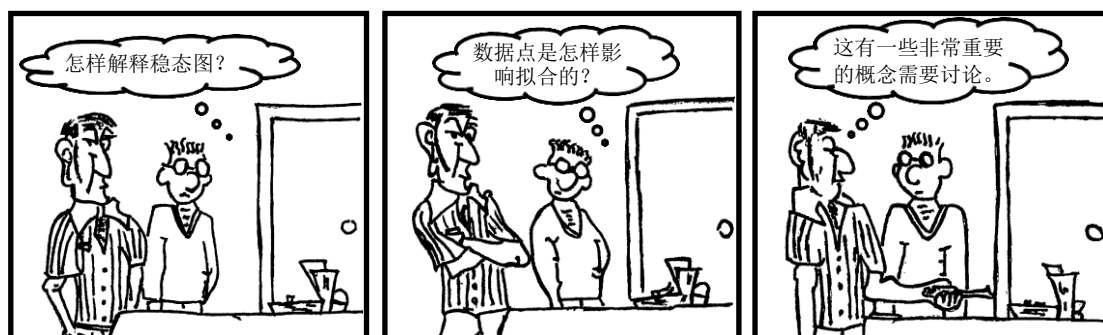
图3 SVD方法系统地选择测量的FRF子矩阵

因此，虽然常规的做法是任意选择测量少量的FRF去确定潜在的参考点位置，但是另一种可能的方法是利用数学方法对一组FRF进行奇异值分解确定潜在的参考点位置，这可能是一种机理更为严格的方法。这个方法通常称为测试参考点识别程序(TRIP)，该方法为参考点的确定提供了另一种途径。该方法在无分析模型可用或者怀疑有限元模型用于预测试分析是否准确时，是相当有用的。

合理选择参考点的诀窍是合理地选择 $u_i u_j$ 项，保证模态振型值在参考点位置处显著。

这样就使得FRF有显著的峰值，因而可以认为测量是充分的。当然，为了完成合理地选择参考点，对系统的模态振型是什么样子必须有所了解。有限元模型或者先验知识对于实现这一点是非常有用的。

如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



怎样解释稳态图？数据点是怎样影响拟合的？

这有一些非常重要的概念需要讨论。

参数估计过程是模型参数（极点和留数）提取过程中非常重要的一步。这个过程通常分为两步：第一步提取极点，然后第二步是估计留数。稳态图是一种从测量数据中提取极点的工具。让我们讨论一下极点估计和稳态图的使用。在这儿包含几个实例，以便于让人们深刻理解参数估计过程中的关键因素。

首先假设我们有一组数据，如图1所示。作为开始，假设三阶拟合能合理地描述这些数据点。通常，系数 $R^2$ 的值越大，认为数据拟合越合理。但图1中包含误差容限（图1中的点划线区域），这样可变化的范围就相当大。从图1中可以清楚地看到有一个数据点作为局外点位于误差容限区域之外。如果移除原始数据中的这一点，再进行拟合，如图2所示，那么系数 $R^2$ 的值将增大。因此，由这组数据可以看出，数据的质量对于提取有效的参数是非常重要的。对于参数估计而言，有高质量的数据是极其重要的。

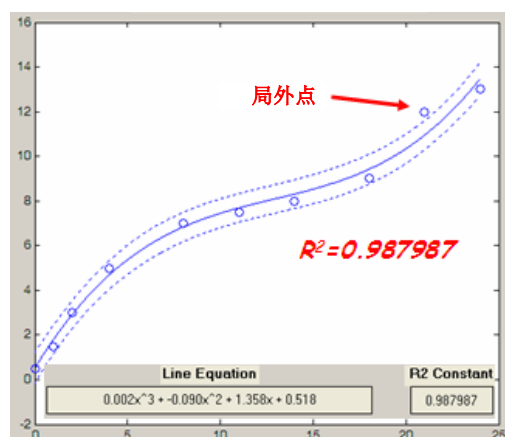


图1 数据拟合有明显的局外点

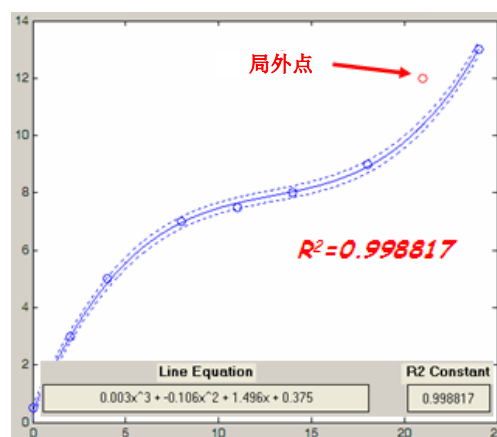


图2 移除局外点后的数据拟合

这个简单的实例清楚地表明高质量的数据是非常重要的。现在考虑如图3所示的数据组。这是一组非常简单的数据，具有明显的一阶（线性）特性。随着模型阶数的增加，让我们来研究估计的参数。

随着模型阶数从一阶增加到四阶，图4中4个子图显示了斜率估计过程。图4a用一阶拟合，得出的斜率为12.097和非常不错的 $R^2$ 值。随着模型阶数增加到二阶，斜率仍然是12.097和非常不错的 $R^2$ 值。因此，模型阶数增加到二阶，斜率估计并无变化。当然，高阶项基本上是起微调作用，用于说明测量数据的变化。

模型阶数增加到三阶，得出的斜率为11.974，非常接近前面一阶估计和二阶估计出来的斜率。实际上，斜率只有1%的变化。因此，我们可以认为斜率基本上相同，与先前的估计结果相比，没有显著变化。模型阶数进一步增加到四阶，估计出来的斜率仍为12.097，没有变化。

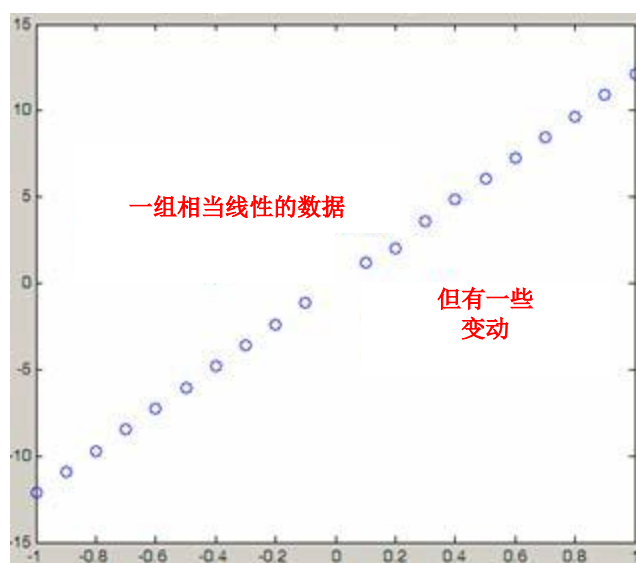


图3 相当线性的数据

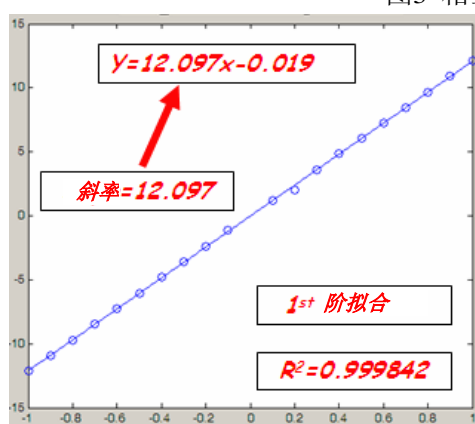


图4a 数据一阶估计

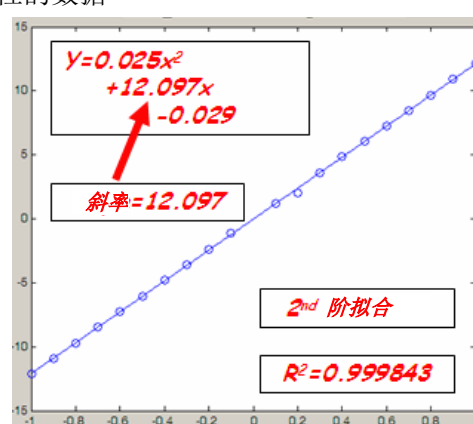


图4b 数据二阶估计

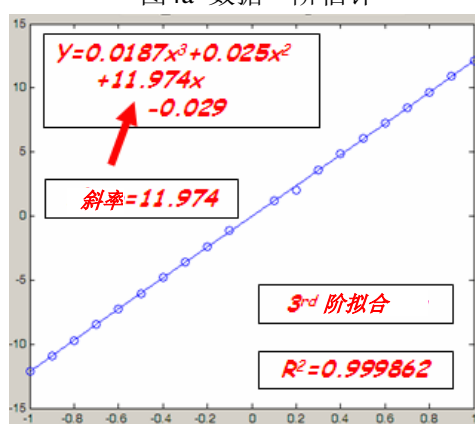


图4c 数据三阶估计

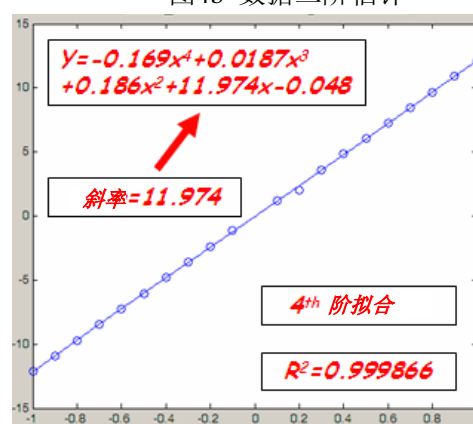


图4d 数据四阶估计

因此，四次估计过程完成以后，通常都认为这组数据的斜率估计近似为12.0，斜率随模型阶数的增加，变化不明显。同时也注意到不管使用哪一阶模型，都无关紧要，因为误差容限都在1%以内，所有的拟合本质上得到了相同的斜率。

这个简单例子使我们深刻明白了后台（软件）是怎样计算稳态图的。随着模型阶数的增加，将会对极点进行不同的估计。从一阶到下一阶，如果极点估计的变化很微小，那么软件将提供一个标记（或者指示，稳态图中用字母表示）帮助指示极点是否已达到一些“稳定值”，而这些稳定值位于一些指定的容限之内（这些容限可能对频率设置成1%，阻尼设置成5%去

确定极点的稳定)。这些稳定的指示将叠加在SUM函数、MMIF函数或CMIF函数之上。一个典型稳态图如图5所示。随着模型阶数的增加，稳态图帮助确定哪些极点是“一致的”或者稳定的。

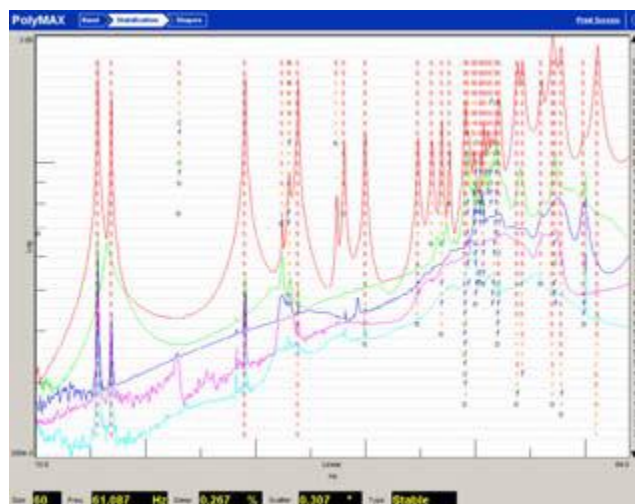


图5 典型的稳态图

如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





稳态图有MMIF和CMIF指示不出来的极点，他们是真实模态吗？  
这有一些重要概念需要讨论。

这个问题出现的可能性非常大，为了对这种情况下发生的状况进行分类，需要进行一些讨论。我们之前曾经在讨论不测量结构重要部分时也讨论过这个问题。但在这个例子中，我们打算让人们明白即使测量很合理，但仍必须对一些方面加以强调说明。

作为例子，我仍打算使用以前用过的平板结构，这个结构有两阶非常靠近的密集模态，使用它是为了展示可能遭遇到的一些状况。我们刚刚讨论过所有的模态指示工具，因此我们已经明白了它们的使用情况。测量这块平板时，使用几个不同的参考点，然后进行评估，以说明一些观点。

第一种情况，用较多的参考点（多于必要的）评估平板，展示感兴趣的模态。在平板上使用3个参考点，位置如图1所示。

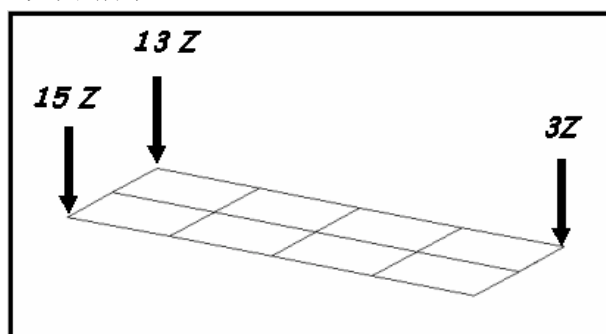


图1 用3个参考点进行测量

图2中，上面显示的是SUM函数，下面显示的是3个驱动点的FRF。现在使用这3个参考点的数据，MMIF函数和CMIF函数两者都表明在第一个频率，约100Hz附近有两阶密集模态，如图3所示，但图中仅显示了CMIF函数。

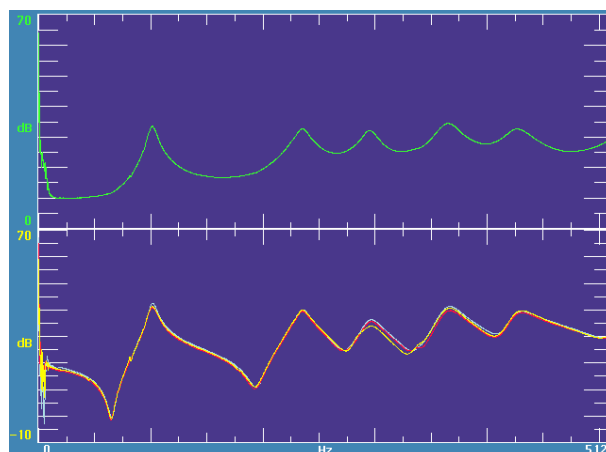


图2 平板的SUM（上面）和FRF（下面）

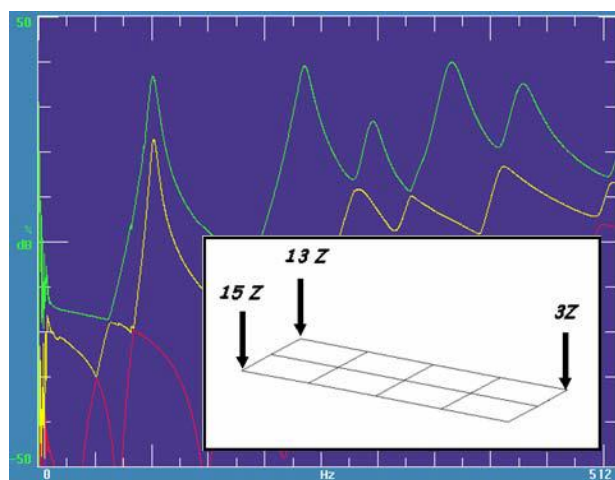


图3 3个参考点的MMIF和CMIF

稳态图清楚地表明在那个频率范围内有两阶模态，如图4所示。

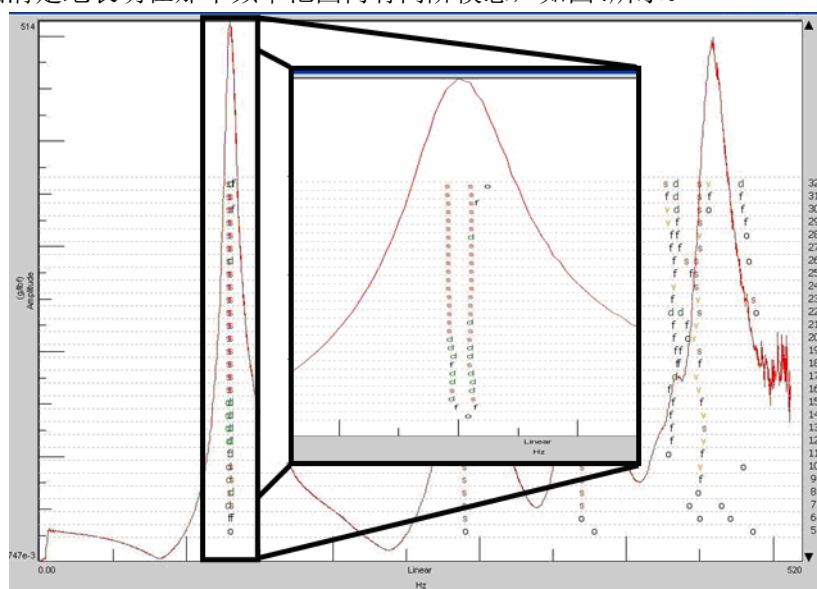


图4 3个参考点的稳态图

这个频率范围相应的模态振型是弯曲和扭转模态，如图5所示。这两阶模态几乎出现在同一频率处，但又不完全重叠，此两阶模态如此密集，以致于称它们为“伪重根”。

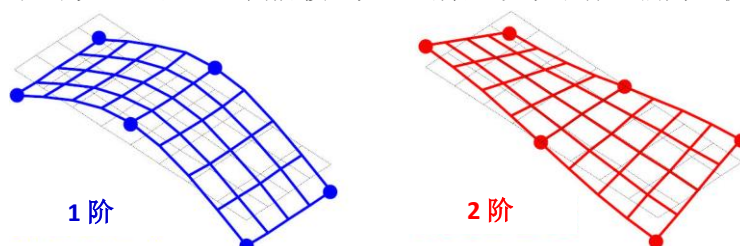
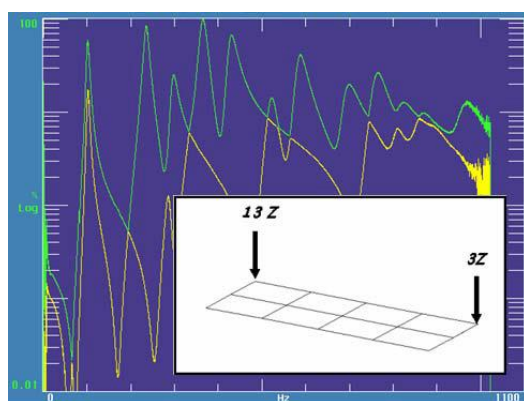


图5 平板的弯曲和扭转模态

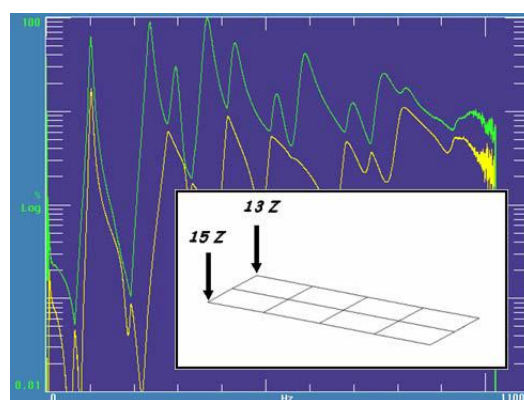
图6显示了3个参考点中任意2个参考点组合下的CMIF。注意图6a和图6b中，两个参考点位置彼此相邻，二者都指示出在那个频率范围有两阶密集模态。但图6c中，参考点位于平板对角线的两个角点上，CMIF函数此时没能指示出这两阶密集模态（注意为了简洁起见，图中只显示了CMIF，MMIF没有显示出来，但它显示的结果与CMIF相同。同时注意到使用图6所示的3个参考点中的2个的稳态图本质上与图4相同）。

为什么会出现这样的情况呢？为什么MMIF和CMIF不能一直清楚地指示出这两阶模态？

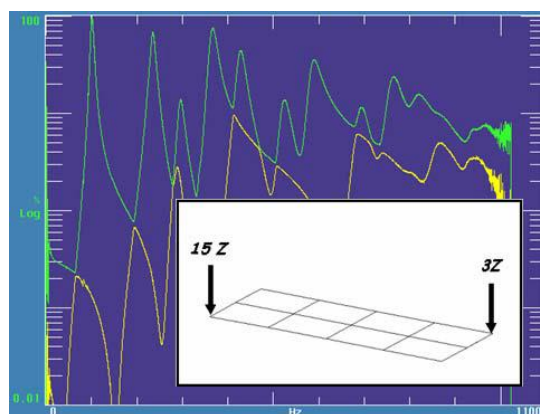
为了回答这个问题，必须讨论相对于参考点位置的结构模态振型。



(a) 参考点位置为3Z和13Z



(b) 参考点位置为13Z和15Z



(c) 参考点位置为3Z和15Z

图6 不同参考点位置的CMIF

考虑图6a中的参考点位置。注意到平板的这两个角点，对于弯曲模态，这两个点的振型值均为负；而对于扭转模态，二者的振型值一正一负。图6b中的参考点的振型值同样也是如此。但考虑图6c中的两个参考点的模态振型，则情况与前两种不同。

在这种情况下（图6c），在两个参考点位置，第一阶模态振型有相同的符号和方向，第二阶模态振型也具有相同的符号与方向。不管它们为正还是负，都不重要，重要的是这两点具有相同的相位关系。这样无法从图6c所示的参考点位置区分出第一阶与第二阶模态之间的差异。但是从图6a和图6b中的参考点位置能区分出两个振型的不同之处，这是因为在这两个参考点位置的相位信息不同。

因此，为了识别出伪重根，在结构上布置两个参考点是不足够的。为了区分出这样的模态，参考点位置必须能提供系统模态独立（不相关）的视角。但是稳态图仍然能识别出在那个频率处有两个根。因此，从这个例子可以明白，稳态图中有可能指示出重根，但MMIF和CMIF不一定能指示出来。

如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。

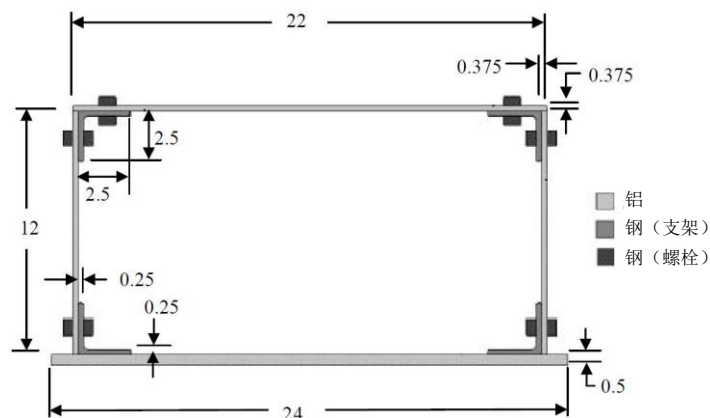


结构普遍使用螺栓连接，它对结构频率改变影响显著吗？  
这需要探讨一些东西。

许多应用普遍使用螺栓连接。这种连接机制在任何地方都可以见到，可能对系统的频率有显著的贡献。如果结构装配非常仔细，并且是以一种可重复的方式进行的，那么结构的频率变化可能相对较小。然而，如果装配是以一种任意的方式进行的，那么装配方式可能会引起结构频率的变化相当显著。显然，这有很大的变化，可能依赖于特定应用中的连接装配方式。

虽然为了研究连接装配方式的影响，可以建立分析模型，但是这些分析模型具有许多自身假设条件，而这些假设条件可能就会引起频率变化。比如，单元类型、网格密度、连接配置方式和实际的连接配置方式等，都对频率变化有贡献。实际上，这些参数详细的研究表明这儿有许多问题需要明白理解。

用一个实际的装配例子，胜过讨论分析建模中需要强调的问题。在这使用螺栓连接的门框结构例子，讨论因螺栓连接配置方式的不同可能引起的频率变化。这个门框结构已用于多方面的研究，包括螺栓连接排列方式的影响等，门框结构如图1所示。首先用正常的合理装配方式连接结构，然后考虑连接具有故意的定向误差，分别对其进行测试，以展示结构频率变化。



注意：

所有的尺寸都是英寸单位

垂直纸面方向厚2英寸，底板垂直纸面方向厚6英寸

四个角撑厚度均为0.25英寸

两侧厚度均为0.375英寸

图1 门框结构

通常，关心的是结构系统中任何连接的变化。但是如果结构装配不合理或者如果结构存在一些制造上的误差引起装配上的一些困难，又会怎样呢？除了正常合理装配连接之外，在这还考虑另外两种情况。一种考虑未对准（角度大于90度）的角撑，另一种情况用垫片补偿

未对准（角度小于90度）的角撑。三种不同的装配方式如图2所示。图2a表示合理装配，图2b表示肥大装配，图2c表示用垫片补偿的间隙装配。

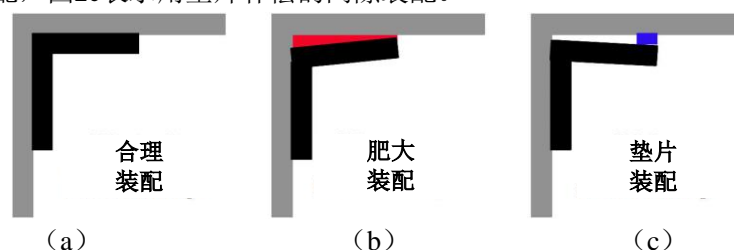


图2 三种不同的装配方式

每一种装配方式装配完成后，确定结构前三阶模态频率，用于比较。比较门框结构顶梁垂向驱动点测量得到的FRF。图3给出了三种不同装配方式下的频响函数，其中顶部黑色为合理装配的FRF，中间红色为肥大装配的FRF，底部绿色为垫片补偿的间隙装配FRF。从图中甚至用肉眼也能观察到三种不同装配方式下频响函数的峰值存在差异。一般说来，幅值非常相近，但频率却明显不同。

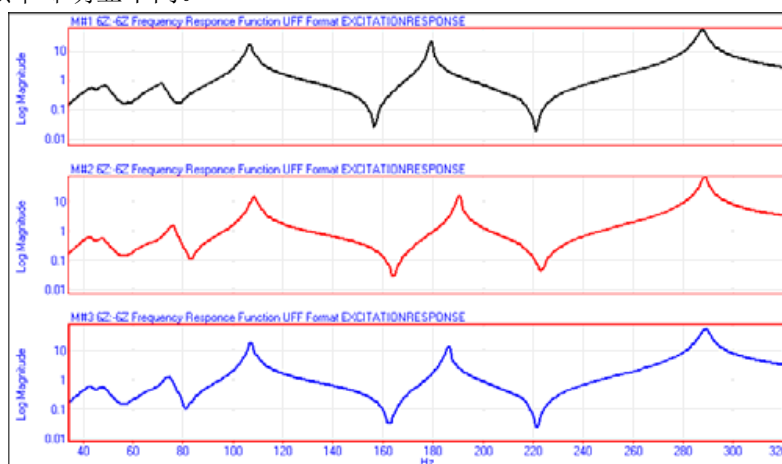


图3 三种方式下的频响函数

对于图3中给出的每条频响函数曲线，使用频域多项式方法估计模态参数。每种装配方式对应的频率和阻尼如表1所示。

表1 三种装配方式下的频率和阻尼

阶数	合理装配		肥大装配		垫片补偿的间隙装配	
	频率(Hz)	阻尼(%)	频率(Hz)	阻尼(%)	频率(Hz)	阻尼(%)
1	71.7	2.65	75.7	2.15	74.4	2.53
2	106.	1.08	108.	1.07	107.	0.843
3	179.	0.334	190.	0.364	186.	0.425

从表1中可以轻易地看出，不合理的连接装配方式能引起结构频率改变。如果在制造/装配过程中不注意，那么就可能因装配引起结构的频率变化，这需要仔细评估。

在这个快速而简洁的讨论中，只给出了少数几种装配方式，用于说明仅改变少许简单的连接装配方式可能产生的状况。结果表明存在差异，需要我们仔细评估。

螺栓连接引起了显著影响，评估这个影响可能会比本文在这展示的更详细。但我希望这些简单的例子能够说明可能产生的一些变化。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





模态振型有时跟预期相比，似乎旋转了一定角度，它们是虚假模态吗？这是怎么回事？这需要探讨一下。

这个问题经常出现，因此需要进行一些方面的探讨。我注意到人们经常对系统的模态振型感到迷惑。常常，人们对模态振型“应该是什么样子”有一个自己的预想样式。当模态振型与预想的样式不相同时，那么你可能会认为模态结果是错误的。

经常结构的模态振型在空间上非常靠近，模态振型满足系统各阶线性组合的要求。因此，与你期待中的样子相比，振型可能会旋转一定的角度。唯一的要求是系统的模态与系统的质量和刚度矩阵正交。系统的每一阶模态都是独一无二的。

为了帮助说明这一观点，使用一个简单的几何结构连同一根梁和一块平板来说明可能发生的一些情况。用直角坐标系描述图1左侧的矩形，选择坐标系的 $x$ 、 $y$ 轴与矩形左下角两边对齐。这样设置坐标能方便地描述结构所有的尺寸。

但如果形状不规则，如图1右侧所示，那么该怎么办？这时我们可以选择几个位置作为参考坐标的原点，但是相对来说，似乎没有一个位置是最合适的。选择图1中右侧不规则形状的顶部角点作为参考坐标系的原点，那么原来位于左下角的坐标系描述的结果与现在坐标系描述的结果肯定不同，因为参考坐标系不同。这意味着用不同的坐标系描述区域内任一点的坐标都是不同的。但是这一点实质上并没有变化。

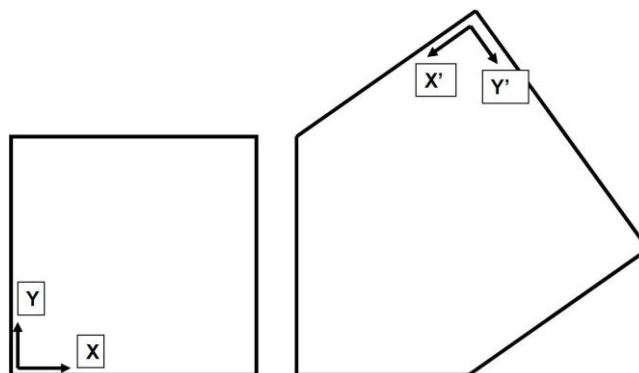


图1 矩形和不规则的形状

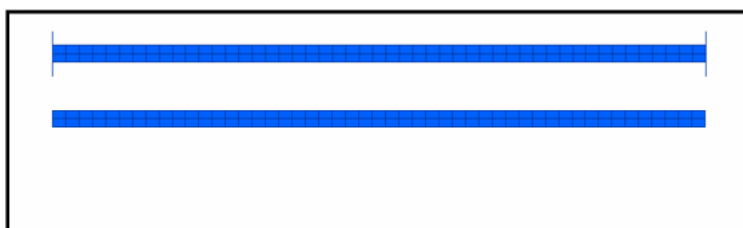
因此，使用这个简单的几何形状实例将为讨论不同的坐标系描述一般结构的模态振型有搭建了一个平台，这些模态振型依赖于所选择的坐标系。图2和图3给出了一根二维平面梁结构的刚体模态。

第一种情况，如图2所示，梁的前两阶刚体模态是由经典的沉浮模态和围绕结构几何中心摆动模态组成。这与人们所预期的前两阶刚体模态是严格相同的。如果出现这样的模态，没有人会有疑问。

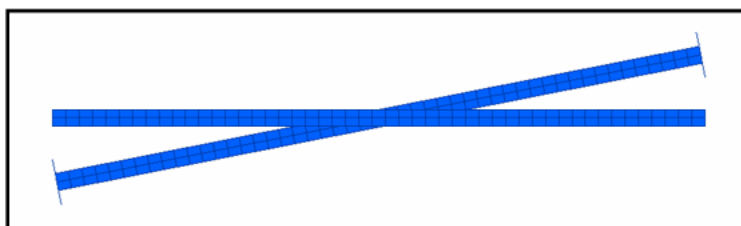
但是第二种情况，如图3所示，梁的前两阶刚体模态有一些轻微的变化。初看起来，许多人都会认为这两阶刚体模态不正确。作出这样的判断是因为它与人们所预期的模态振型不相符。你会注意到第一阶模态主要是沉浮，但有一点轻微的摆动，而第二阶模态主要是摆动，



但不是围绕几何中心摆动。

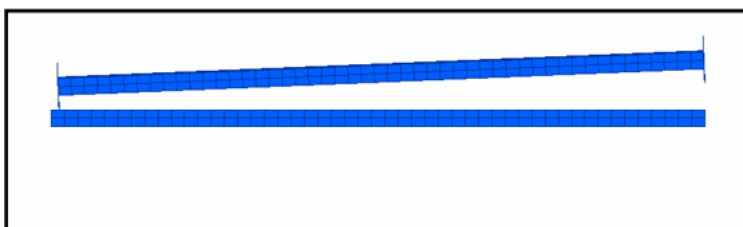


(a) 沉浮刚体模态

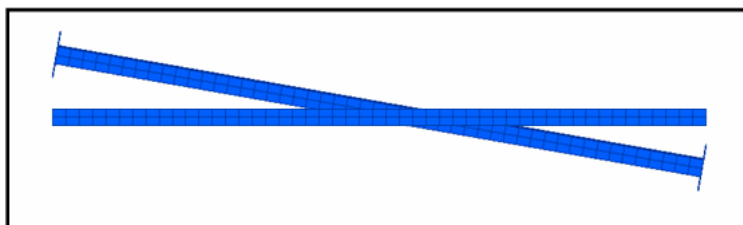


(b) 围绕中心的摆动刚体模态

图2 围绕几何中心的刚体模态



(a) 带有轻微摆动的沉浮刚体模态



(b) 偏离中心的摆动刚体模态

图3 不围绕几何中心的刚体模态

虽然这些模态看起来可能不像你预期的(或者你喜欢的)那样子,但它们是完全正确的。因为它们本质上频率相同,是这些模态的线性组合,这些组合形成了一个线性无关向量组,与系统的质量和刚度矩阵正交。

这种现象也会出现在系统的弹性模态中,当频率存在重根或者伪重根时。图4给出了一组伪重根的模态,它们完全出现在相同频率处。图4中给出的这些模态振型与预期相同,第一阶是弯曲模态,第二阶是扭转模态。但是图5中同样是这些模态,此时它们看起来似乎不再是简单的弯曲和扭转模态。这些模态只是采用了不同的坐标系描述它们。只要模态表现为一组正交向量,那么从数学角度上讲,它们就是正确的。只是它们可能不再是我们所预期的样子了。

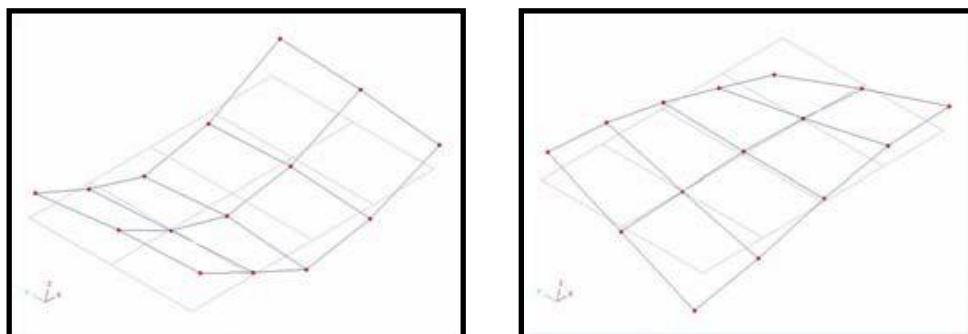


图4 纯弯曲和纯扭转模态

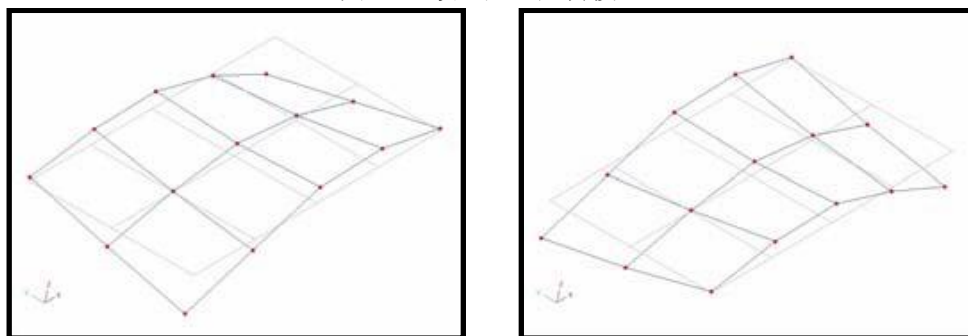


图5 弯曲和扭转混合的模态

当结构具有双重对称性或者具有重根或伪重根时，这个现象就会出现。另一个可能出现的情况是使用不同的数值求解算法。因为求解算法通常是对一组解向量进行迭代，这样就没有理由说明为什么结果会收敛于某一特定的参考坐标系了。实际上图2和图3中显示的结果是采用了两种不同的有限元特征值求解方法得到的，一种结果恰好收敛于我们所预期的，而另一种结果却不是这样的。图4和图5所示的模态是对结构进行实测得到的，而这个结构我们知道它存在伪重根。

我希望这些能消除你对模态振型和它们可能的方向的迷惑。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



所有的模态软件都需要参考自由度，为什么FFT分析仪的参考又是另一回事？  
这是另一个领域的迷惑。

这是另一个领域的困惑，人们经常会不知所措，当试图进行模态调查并获得结果时，它可能会使你感到沮丧。当单独使用FFT分析仪采集数据，脱离模态分析软件时，通常会遭遇这个问题。但是使用任何模态分析系统采集数据也可能遭遇这个问题。

在讨论细节之前，让我们回顾一些基本因素，使这个问题更透明。这个问题的真实产生原因是因为FFT分析仪不止用于模态测试和使用模态分析软件生成模态振型。FFT分析仪是一个通用设备，可用于为任何信号生成频响函数。测量信号可以是一般用途的信号，如电路分析、声学测量、传递率测量等等。

FFT分析仪的概念是测量两通道或者更多通道。通常人们试图进行的测量是得到输出与输入之比。也就是说，这两个信号之比通常是人们感兴趣的。

作为示例，在这我们进行一次测量，测量电路（滤波器）的输出电压与输入电压之比，如图1所示。（注意这些测量是一般性的测量，不是典型模态测试的力和加速度信号）。因此，我将输入电压连接到FFT分析仪的第1通道，电路的输出电压连接到FFT分析仪的第2通道。或者也可以交换两个通道，因为这并不重要。

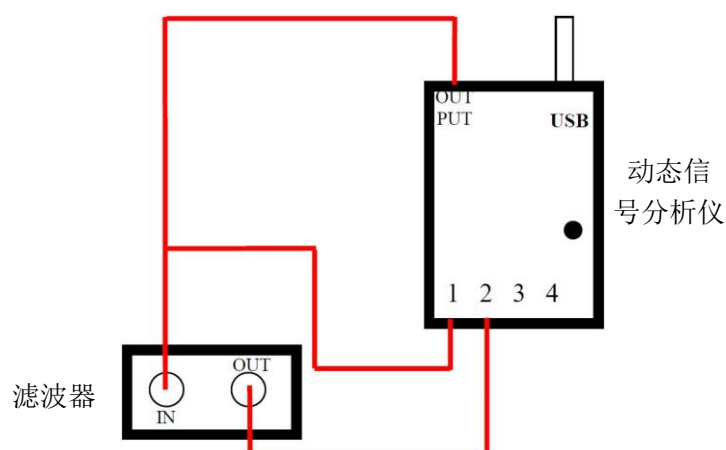


图1 典型的输入/输出测量设置

但是希望得到的频响测量是电路的输出电压“相对于”输入电压而言的，会是什么样的呢。因此，根据FFT分析仪的特性，测量得到的输出电压谱是相对于“参考信号”，也就是输入电压而言的。

FFT分析仪的参考通道依赖于哪个通道用作测量输入参考电压，而不管它是1通道还是2通道，或者其它通道。因此测量得到的频响函数可能看起来有些像图2所示的，图2中测量到的是滤波器的输出电压相对于输入电压之比。

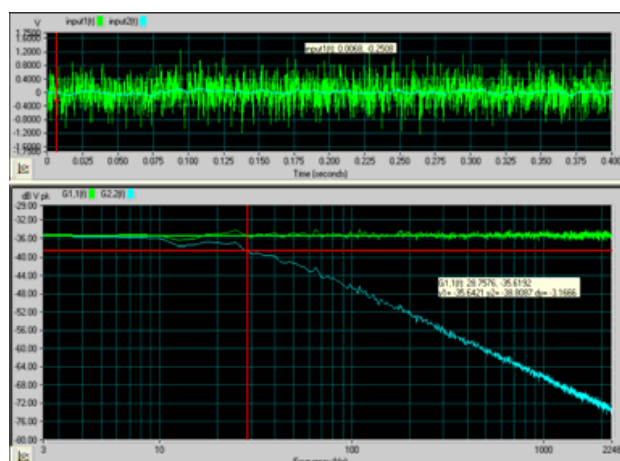


图2 典型的输入/输出FRF测量

因此，FFT分析仪的参考通道与测量输出输入之比有关。那么实验模态测试的参考（点）又意味着什么呢？通常，模态测试中的参考点是测量过程中固定不动的测点。典型的模态测试的参考（点）依赖于进行锤击法测试还是激振器测试。图3给出了锤击法和激振器测试得到的FRF矩阵。

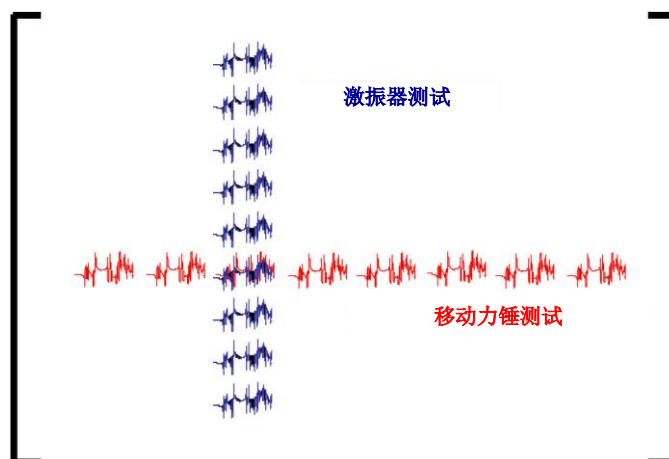


图3 激振器和力锤激励得到的FRF矩阵

激振器测试时，激励力作用在同一个测点，响应传感器测量结构上所有测点的响应。这时参考（点）与FFT分析仪的参考通道的命名是一致的。

但是对于移动力锤的锤击法测试而言，力锤从一个测点移动到另一个测点，加速度计在某个测点位置固定不动，因此这个加速度计所在的位置称为“参考（点）”，测量到的FRF是输出的加速度与输入力之比。因此，恰恰在这儿问题出现了。因此，“参考（点）”一词表明了不同的应用意味着不同的内容。

因此，依赖于FFT分析仪实际测试过程中的具体应用，为了不与模态分析软件中的“参考（点）”相“混淆”，这可能需要一个特定的文件命名习惯。

当然大家都知道FRF矩阵的测量具有互易性，知道参考（点）标识仅仅是一个管理步骤，当从FFT分析仪调入数据到特定的模态分析软件时，需要强调这个参考（点）。但是它是一个令人灰心的管理步骤，为了能够在模态分析软件中使用从FFT分析仪得到的频响函数，又必须强调这一点。

一旦确定了合理的程序，那么用文件纪录它就变得相对简单了，这样，每人都知道该怎么做了。我自己多年来已生成了许多不同的图表，用于提醒我哪天用哪样的FFT分析仪做了什么事。一个典型（老）的示意图，如图4所示，文件的命名方式使我能清楚地知道那次测量做了什么工作。（图中的002Z006Z.DAT文件表明当时测试的是Z方向的6号测点比Z方向的

2号测点的FRF，译者注)

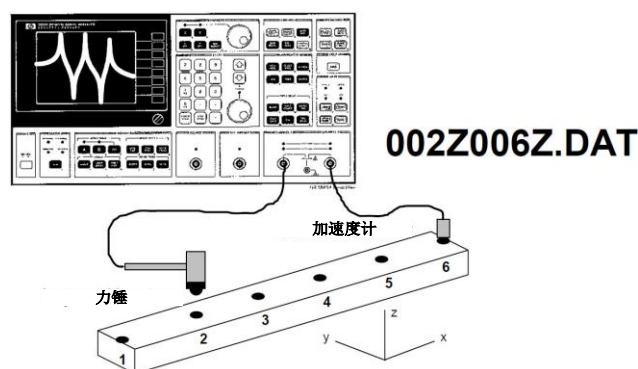


图4 文件命名方式示意图

依赖你当前使用的模态分析软件，为了合理确定测量的“模态参考点”，可能不同的软件处理数据的方法不同。也许可以通过“交换”或“转换”命令获得合理的“模态参考点”。或者可以将测量数据以一种特定的组织方式写成一种通用的文件格式（UFF格式），或者将测量得到的数据导入到模态软件中处理这个问题。也可通过测量是来自“移动”力锤还是“固定”力锤参考位置来确定。

你怎样处理，依赖于你使用的特定的FFT分析仪和使用的模态分析软件。但是我可以向你保证的是每个模态软件供应商都会面临这个相同的问题，并且有特定的程序处理这个我们经常遭遇的问题。我想对于这个问题，到目前为止，已经很清楚问题是什么了，用模态软件处理这个问题非常简单，所有的模态软件都要求必须执行这一步。

我希望这些解释能消除你对“参考（点）”的困惑，不管是FFT分析仪还是模态软件。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。

（注意：英语中的“参考通道”与模态“参考（点）”为同一个单词：reference，而在中文中就不存在混淆，因为参考后面还有不同的修饰语。当然，移动或固定力锤，参考点也不同，因此Peter就“参考”一词又写了新的一篇文章，但在中文里，这二者是有区别的。----译者注）



需要使用更多残余项改善曲线拟合吗？当使用更多残余项时，结果看起来更好。  
这个问题需要进行一些探讨。

使用频域曲线拟合技术时，许多模态软件都考虑在多项式中使用残余项以考虑带宽之外的影响。这对于获得准确的模态参数来说，是非常有用的。不管何种方法，用户能指定残余项以改进数据拟合结果。虽然这样可能“看起来”效果更理想，但令人生疑的是，这些参数在哪些方面或者是否真的得到了改善？因此，让我们来讨论模态参数估计过程中使用残余项背后的基本方程和相关概念。基本的频响方程可以写成

$$[H(s)] = \sum_{k=1}^m \left( \frac{[A_k]}{(s-s_k)} + \frac{[A_k^*]}{(s-s_k^*)} \right)$$

如果我们仅在频响函数中间带宽某处书写这个方程，那么这个方程将包含三个不同的项，一项位于感兴趣的带宽之下，一项位于感兴趣的带宽内和一项位于感兴趣的带宽之上。这时频响方程可以写成

$$[H(s)] = \sum_{\text{terms}}^{\text{lower}} \left( \frac{[A_k]}{(s-s_k)} + \frac{[A_k^*]}{(s-s_k^*)} \right) + \sum_{k=i}^j \left( \frac{[A_k]}{(s-s_k)} + \frac{[A_k^*]}{(s-s_k^*)} \right) + \sum_{\text{terms}}^{\text{upper}} \left( \frac{[A_k]}{(s-s_k)} + \frac{[A_k^*]}{(s-s_k^*)} \right)$$

我们经常仅在感兴趣的带宽内，用感兴趣的模态来表征这个方程，带宽外的多项式称作残余项，用于补偿带宽之外的影响，这时方程为

$$[H(s)] = LR + \sum_{k=i}^j \left( \frac{[A_k]}{(s-s_k)} + \frac{[A_k^*]}{(s-s_k^*)} \right) + UR$$

说明这一点的某条典型频响函数，如图 1 所示。

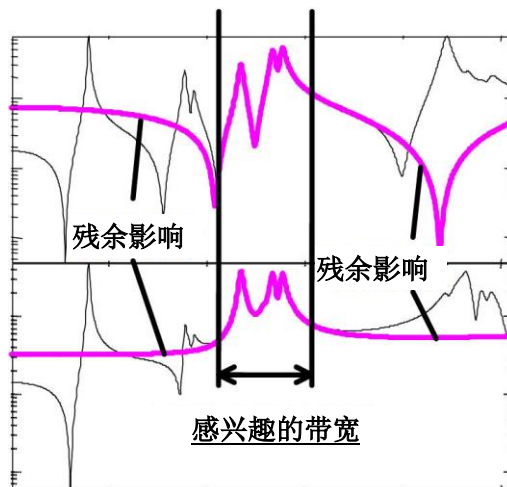


图1 感兴趣带宽内的FRF



为了描述残余项，考虑单自由度的位移频响函数更有利。图 2 表明共振频率以下的频率段主要用占主导地位的刚度项来描述，共振频率以上的频率段主要用占主导地位的质量项来描述。这样使得频响函数就可以用感兴趣的带宽和下残余项（LR）、上残余项（UR）来表示。通常在多项式曲线拟合中用 4 个残余项能充分近似这些项。

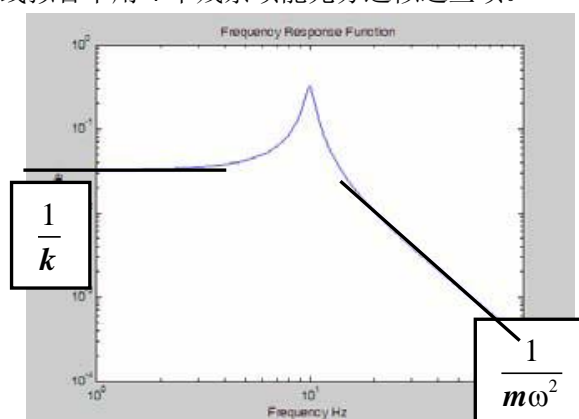


图2 带残余项的单自由度系统

现在让我们使用一次测试，以说明在提取参数时使用过多的残余项，将会出现什么情况。使用一个 6 自由度模型，给出的带宽内有四阶模态，但是这四阶模态位于两阶主导模态之间。

对带宽中间的这四阶模态进行拟合，在多项式曲线拟合中（4 项）使用典型的残余项，如图 3 所示。注意到拟合是合理的，但是并不是所有的频率拟合结果都理想，至少肉眼可以看出来。因为此次拟合仅用了 4 个残余项，另一次拟合用了 10 个残余项，如图 4 所示。这次拟合结果从视觉上看，似乎拟合效果更好。为了说明一个观点，同时又使用单自由度方式拟合了一次，如图 5 所示。

为了评价这几次的拟合效果，需要将从这些拟合结果中提取的数据与实际参数进行对比。表 1 列出了这四阶模态的频率、阻尼和留数以及从两种拟合方法中提取到的这些参数。

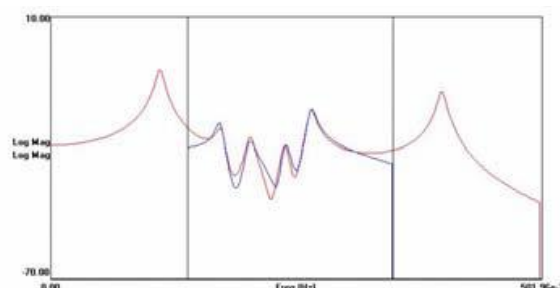


图3 用4项残余项进行拟合

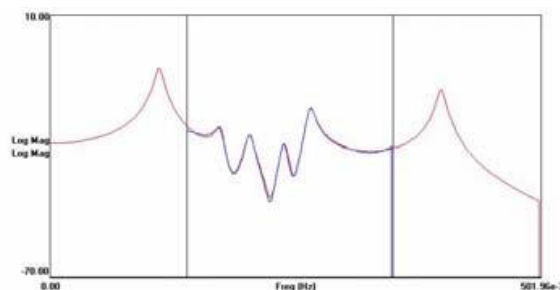


图4 用10项残余项进行拟合

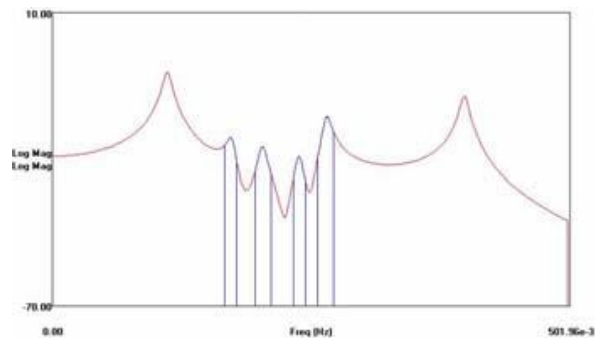


图5 单自由度多项式拟合

表1 频率/阻尼/留数

分析结果				4项残余拟合		
阶数	频率Hz	阻尼%	留数值	频率Hz	阻尼%	留数值
1	0.173	2.46	311	0.173	2.17	349
2	0.203	1.95	233	0.202	2.22	223
3	0.239	1.55	159	0.239	1.65	149
4	0.265	1.49	595	0.265	1.51	596

10项残余拟合				单自由度方法		
阶数	频率Hz	阻尼%	留数值	频率Hz	阻尼%	留数值
1	0.173	2.66	348	0.173	2.30	314
2	0.203	1.91	231	0.203	1.96	234
3	0.238	1.43	137	0.239	1.68	159
4	0.265	1.50	584	0.265	1.50	594

一旦评估完表1的数据，就明白了增加过多的残余项并不能从总体上改善参数估计，实际上还可能稍微降低了结果的精度。同时注意到单自由度方法得到的结果总体最佳。这就说明模态参数估计过程是提取到描述系统特征合理参数的过程，而没必要使曲线彼此之间重叠非常完好。这么多年的模态参数估计清楚地表明模态参数估计使用过多的残余项仅仅是设法补偿频响函数中的噪声或者不完整性。使用过多的残余项不认为是合理提取模态参数的有效方法。大多数商业模态软件中指定残余项数的默认设置对于大多数曲线拟合的情况是合理的。如果需要使用过多的残余项拟合测得的频响函数，使得拟合结果“看起来二者更吻合”，那么这时测得的频响函数可能包含噪声或者频响函数不完整，因而我们可能需要质量更高的测量数据。

我希望这些简单的实例已说明了有关模态参数估计中的一些重要观点。指定过多的残余项不是提取准确的模态参数的优先方法。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



锤击法测试中一些测点的相干好于其他点的相干，什么地方出错了吗？  
这的确需要讨论一些问题。

这是测量数据质量另一个领域的问题，需要加以讨论。锤击法测试是迄今为止获得频响函数最普遍和最受欢迎的方法，并且是频率响应测试方法中非常经济的方法。另外，对于现场试验而言，锤击法测试易于设置、极其便携。锤击法测试由于易于实现，在许多行业和应用中广泛使用。

虽然易于实现，但进行锤击法测试时，需要明白许多细节问题。一些问题与连击、预触发延迟、相对于信号总有效值的高峰值电压、系统非线性等等有关。其中的一些问题通常被认为是锤击法测试的“关心领域”。这些问题经常成为锤击法测试结果的相干为什么不像希望的那样可接受的原因。但是这些问题可能并不是唯一原因，也可能与在这篇文章中探讨的一个重要考虑事项有关，即锤击位置对相应的频响函数和相干的影响。

锤击法测试时，锤击位置对相应的频响函数有着非常显著的影响。这一点可以从每组平均数据得到的相干函数中体现出来。首先，让我们进行一组测试，在测试过程中时刻注意锤击位置，以便获得高质量的测量。然后对同一个结构进行一组“近次于完美”的锤击法测试，以展示质量变差的相干。

结构非常简单，易于得到高质量的测量。在结构上进行典型的驱动点测量，得到频响函数。选择的采样参数使得输入力和加速度响应在数据的一个样本纪录中能完全观测到。这样，输入或输出信号就不需要使用任何窗函数了。

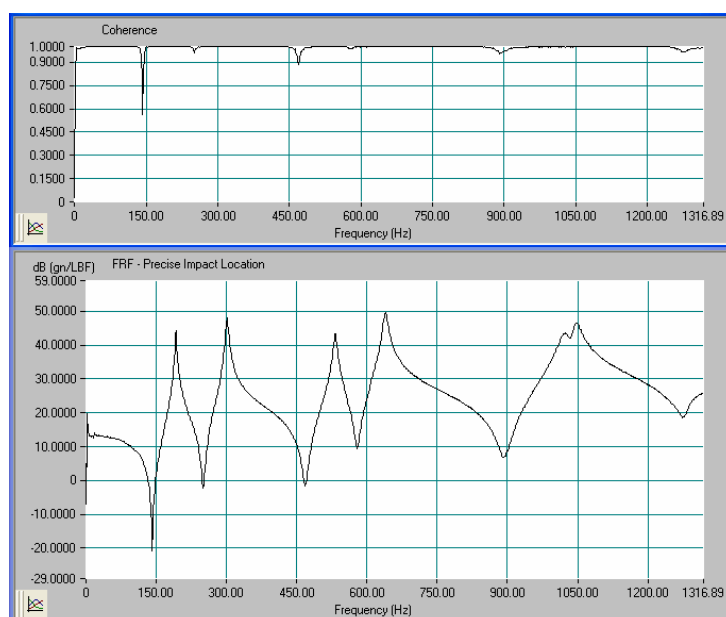


图1 锤击精确控制下的FRF和相干

图1中给出了测量的频响函数（下面的曲线）和相干（上面的曲线）。注意到频响函数表

明这是一次高质量的测量，此次的相干也非常理想。在大多数频率范围内，相干系数都非常接近1。相干在反共振峰处有轻微的下坠，但对于这次测试而言不是问题。（注意到相干在反共振峰处有下降是能预料到的，因为结构在这些频率处是没有响应的，所以系统的响应与测量的输入是没有因果关系的。）

第一次测试，极其关心锤击位置，以确保每次平均是同一点同一方向锤击的数据。这是锤击法测试中非常重要的一个关心事项。

为了说明如果不关心这一项时，会发生什么情况，进行了一次测试。每次锤击都是有意在一个非常接近锤击位置的区域内，也就是说每次锤击位置都有一些轻微的变动。平均次数与前面相同，图2显示出了此次测量的频响函数（下面的曲线）和相干（上面的曲线），注意到此次测量每次的锤击位置存在轻微变动。虽然频响函数看起来可以接受，但相干的质量在整个频带上似乎存在一些显著的下降。虽然相干在频响函数峰值对应的区域是可接受的，但总体而言相干较差。

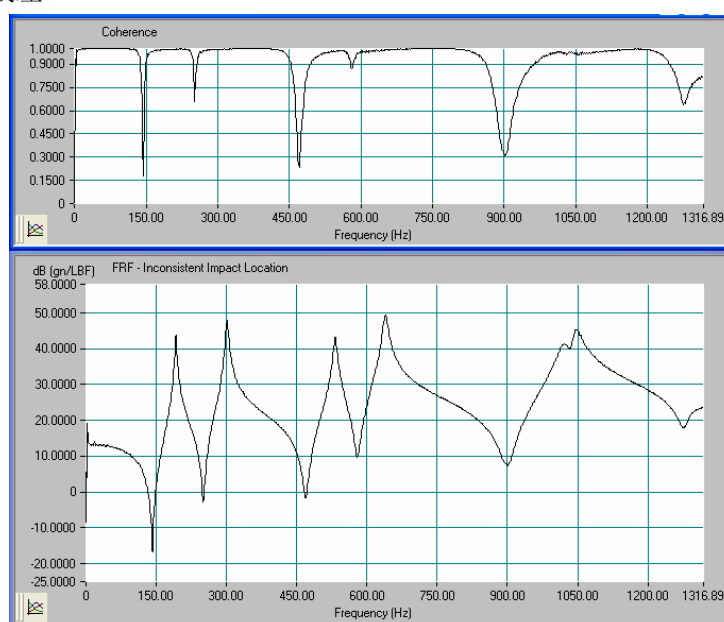


图2 锤击较差控制下的的FRF和相干

相干在频响函数的反共振区域受到严重的影响。这是因为虽然共振频率是系统的全局特征，但是反共振频率却绝对不是系统的全局特征。反共振区域严重依赖特定的输入-输出测量位置。因为测试过程中不能保证测点的每次锤击都是在同一位置进行，那么每次输入输出测量时，反共振区都会发生变化，而多次输入输出测量得到了这个测点的平均结果。因而，对一个测点的测试过程中从一次锤击位置到下一次锤击位置，位置不一致性，因此相干也就反映了这一点。

进行另一次测试，锤击点保持不变，但是每次锤击的角度有变化。图3给出了此次测量的频响函数（下面的曲线）和相干（上面的曲线）。与上一次测量相类似，相干的质量也有下降。这次测量也表明反共振区缺乏一致性。

从图2和图3所示的这两种情况中可以看出，相干远不如图1所示的好。这是因为锤击位置不一致，不管是每次锤击位置不相同，还是每次锤击角度不相同。两种情况都清楚地表明相干的质量存在降级。因而要求每次锤击时都应该严格、精确控制锤击激励的位置和方向，每次锤击得到的数据组成了最终平均的结果。

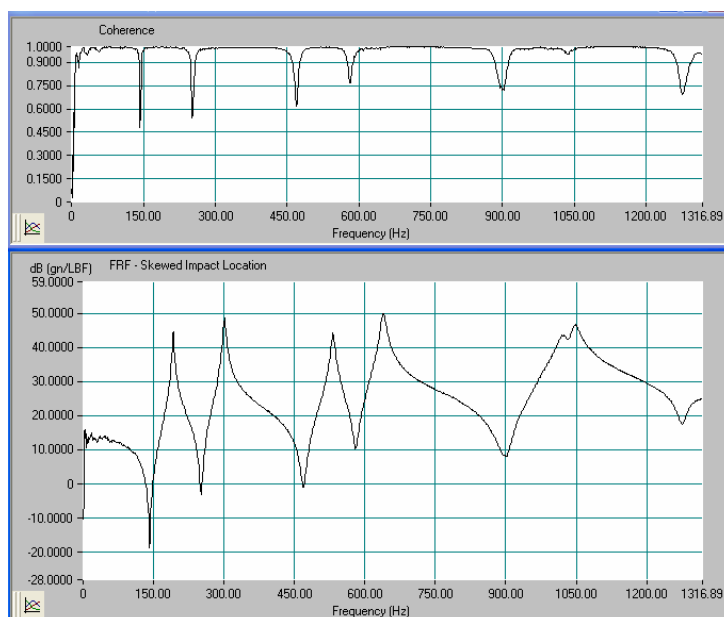


图3 倾角锤击下的FRF和相干

这儿所描述的几种情况是锤击法测试过程中极其常见的问题。特别是在测试周期长，测点多的情况下更容易出现。通常，随着测试时间的推进，整个测试过程中很容易出现厌烦情绪，因而很难保证整个测试过程中锤击的一致性。当锤击位置处于结构的顶部或底部等不方便进行锤击的位置时，这个问题同样常见。甚至爬上周围结构上进行锤击（经常是以非常不自然的姿势进行）时，这时就更难保证锤击的一致性了。

因此，锤击法测试时务必谨慎，保证每次锤击在同一点，同一方向，因而才能保证得到的所有相干是整体可接受的。

我希望这些已使你明白锤击法测试时相干质量可能降级的原因。当然影响相干的可能因素很多，这只是其中的影响因素之一。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



加速度计没有过载，但测量却很糟糕。什么地方出错了？  
我们需要进行一些讨论。

导致产生这个问题的因素很多。测量可能被其他各种不同方面的因素干扰或污染了。不同的情况可能会遭遇不同类型的问题。但在这个特定例子中，这个问题可能对你来说比较陌生。初看起来，测试这个结构应该不难，没有多大问题。

让我们对一个不同的结构进行测试，再现你的测量系统存在的问题。这儿对一块简单的平板结构进行锤击测量，使用一个加速度计。进行三次不同的测试，以表明测量过程中可能出现的问题。

#### 第一种情况：灵敏的加速度计加指数窗

这次测量使用锤击激励和一个灵敏度高的加速度计。因为泄漏是个问题，所以需要为此测量施加指数窗。图1给出了输入激励和由加速度计得到的响应信号。同时图1中还给出了测量时的ADC量程设置。此次测量从时域上看起来可以接受，似乎也没出现任何问题。然而，考虑图2所示的频响函数和相干，表明此次测量的确非常糟糕。在图示的频率范围内，频响函数没有真实有用的信息。显然，此次测量得到的数据质量一点也不高。

#### 第二种情况：灵敏的加速度计不加窗

第二次测量还是使用锤击激励，但响应不加窗，以表明是否存在额外可用的信息。图3给出了力脉冲和由加速度计得到的响应，同时也给出了测量时的ADC量程设置。从时域上看，没有出现任何过载。考虑图4中的频响函数和相干，结果看起来仍然糟糕。

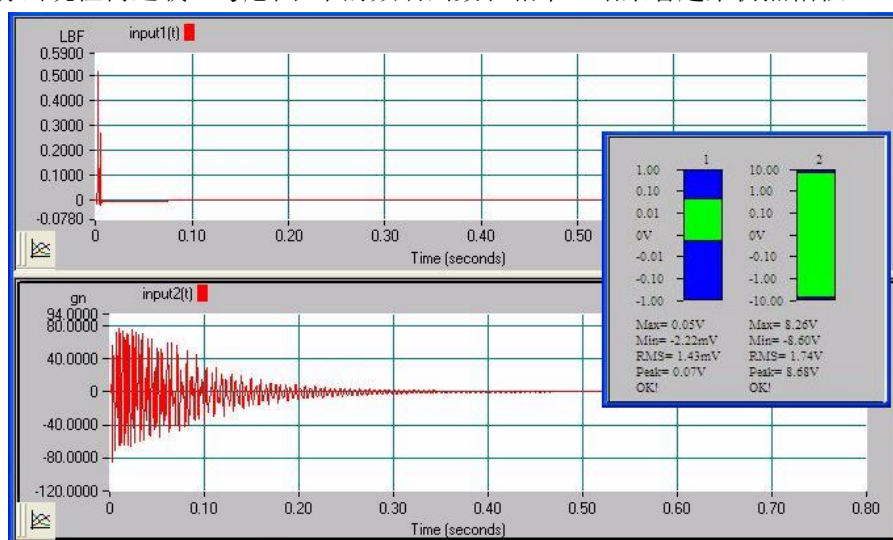


图1 第一种情况：使用高灵敏度加速度计，激励和加指数窗的响应



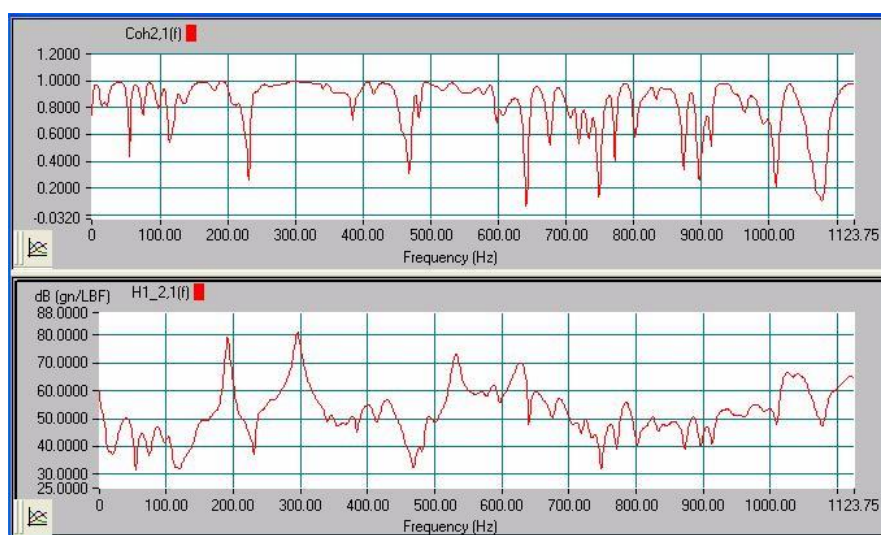


图2 第一种情况：高灵敏度加速度计测量，加指数窗的FRF和相干

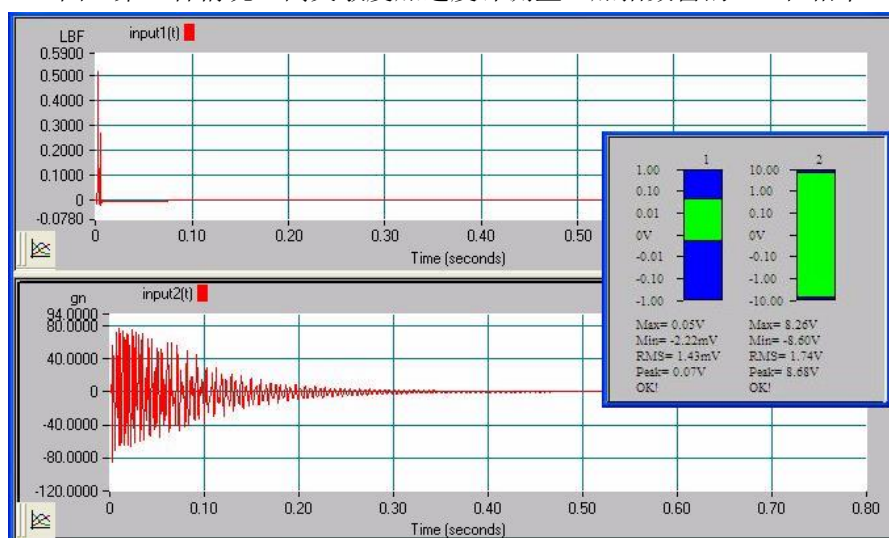


图3 第二种情况：使用高灵敏加速度计、激励和不加窗的响应

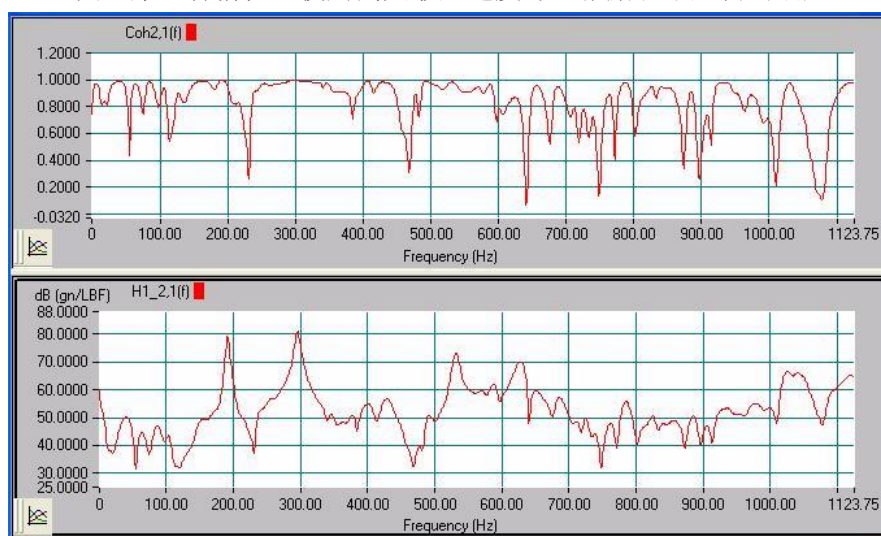


图4 第二种情况：使用高灵敏加速度计，不加窗下的FRF和相干

从时域波形上看，对于二阶指数衰减系统而言，响应似乎与预期不一致。这儿出现的真实原因是因为加速度计响应太大，以致于加速度计本身出现过载，导致加速度计以非线性方

式响应。在时域响应开始的0.05秒内，系统没有出现以指数形式的响应。但是有趣的是加速度计的总电压输出没有超过10V，因而没有超出采集系统的ADC的量程。

### 第三种情况：低灵敏度的加速度计不加窗

此次测量还是使用锤击激励，响应不加窗函数，但是此次使用一个灵敏度低的加速度计。图5给出了时域波形，图6给出了频响函数，结果看起来与预料的一样。

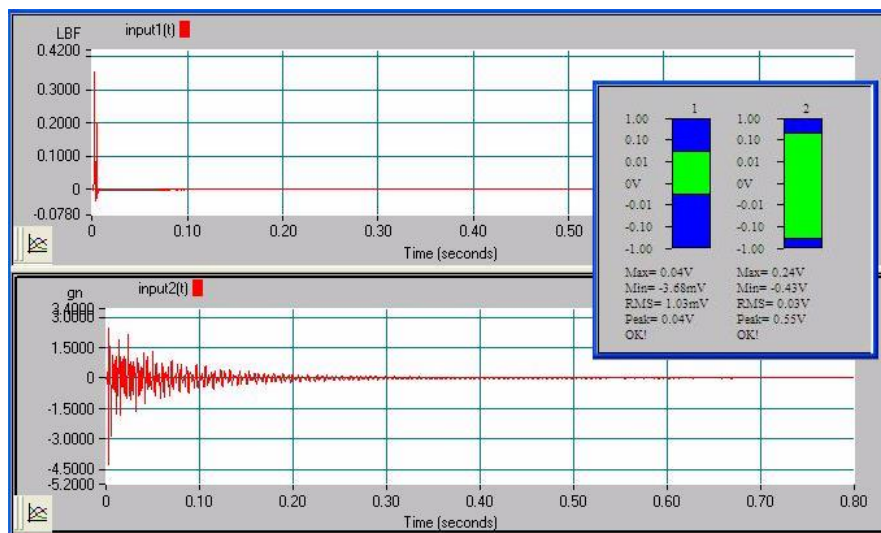


图5 第三种情况：灵感度低的加速度计，不加窗的FRF和相干

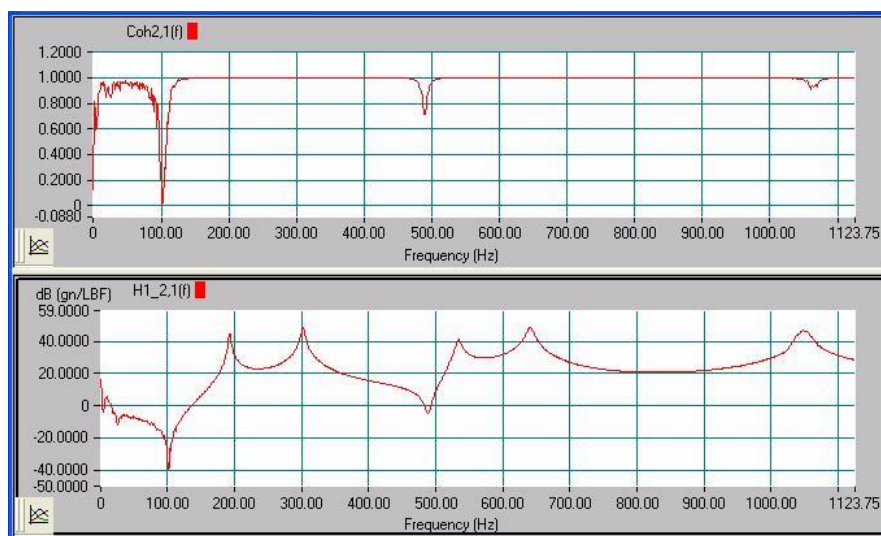


图6 第三种情况：灵感度低的加速度计，不加窗的FRF和相干

在这个例子中，问题的出现是由于锤击法测试中使用的加速度计灵敏度太高。虽然FFT分析仪的ADC没有过载，但是加速度计由于响应大，本身已过载，这就导致响应远不同于预期的指数衰减响应。因此，考虑测量过程中时域和频域等所有不同方面是非常重要的。

我希望这些能让你明白这些测量问题。你不仅需要考虑测量系统，还需要考虑使用的传感器。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



二次连击是不希望出现的。多次连击呢？

现在我们有必要讨论某些东西。

我们之前已经讨论过二次连击，并且表明虽然不希望出现二次连击，但可能在许多情况中，它们是不可避免的。事实上，先前我们讨论的二次连击测量未必如大多数人所声称的那样不可接受。当然，必须检查整体测量数据，包括频响函数和相干，还有各种形式的平均频谱。

现在这儿的问题在于，多次锤击作为一种激励技术能否可用，使用多次锤击进行测量是否会出现问题？

这个问题提得相当好，有必要仔细思考。典型的锤击测量只对结构锤击一次，因而由锤击产生的响应通常是指数衰减形式的信号。

现在，如果我们考虑一组随机输入力，那么输入力信号可以认为是一系列时间间隔为 $\Delta t$ 的脉冲叠加在一起的结果。实际上，在任何一本振动课本里都有处理任意信号的方法，这些方法称为迭代法、或者卷积积分、或者杜哈梅积分，用于计算任何系统的任意信号。

在这个例子中，对结构施加一系列的脉冲，但施加脉冲时必须细心。应该按时间和空间间隔不相关的方式施加这些脉冲。这些脉冲不应该施加到整个采样周期，而应该是采样周期的一部分，比如50%~75%。但是，响应信号应该在整个采样周期内能完全观测到，以避免出现泄漏。这样一来，所有的测量都满足傅立叶变换要求。实际上，这类脉冲信号接近宽带激励，其特征类似于猝发随机。

对一个简单的结构进行测量，以说明这种激励技术。由于这个结构的响应特性，二次连击是不可避免的，但是不那么严重，不至于会降低测量数据整体质量。

第一种情况：施加单次锤击，时域锤击和响应信号，如图1所示。输入信号的功率谱和频响函数，如图2所示。频响函数和相干，如图3所示。总的来说，测量不错，但是在输入的时域信号中可看到有二次连击的影响，并且输入功率谱出现了变化。但输入功率谱变化相当小，以致于系统的总体测量没有失真，通过相干可以证明这一点。

第二种情况：施加一系列的锤击，时域锤击和响应信号，如图4所示。输入功率谱和频响函数，如图5所示。频响函数和相干，如图6所示。虽然施加了多次锤击，但是总体测量非常不错。相应的频响函数和相干也非常理想。

我希望这能表明多次锤击激励，实际上也能用于激励结构，并且能得到相当不错的响应函数。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。

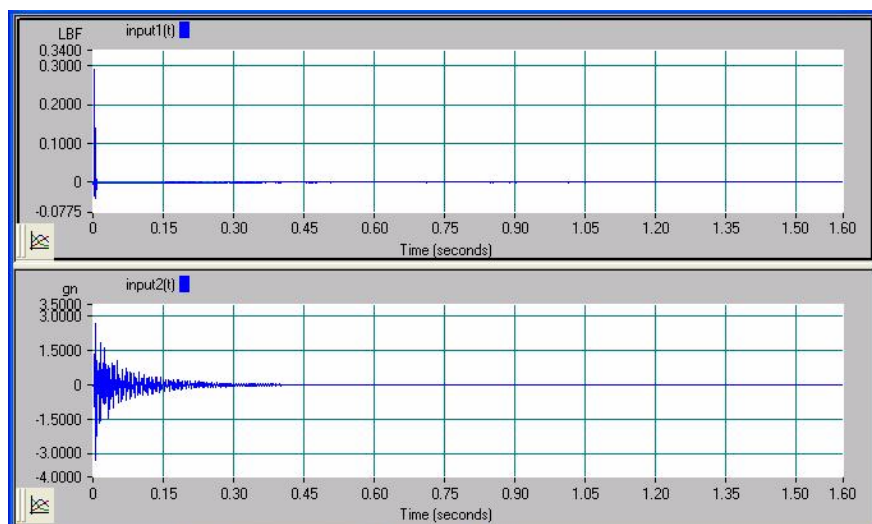


图1 第一种情况下的单次锤击的激励（上）和响应信号（下）

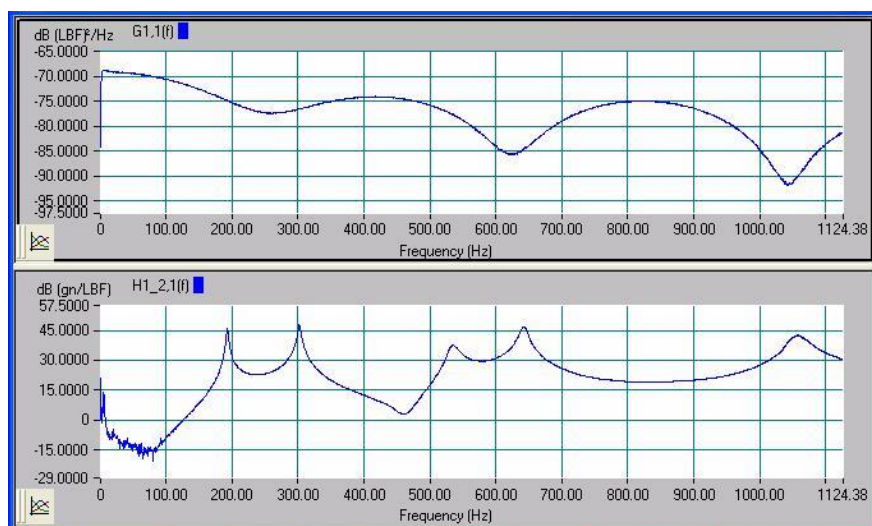


图2 第一种情况下的单次锤击的FRF（下）和输入功率谱（上）

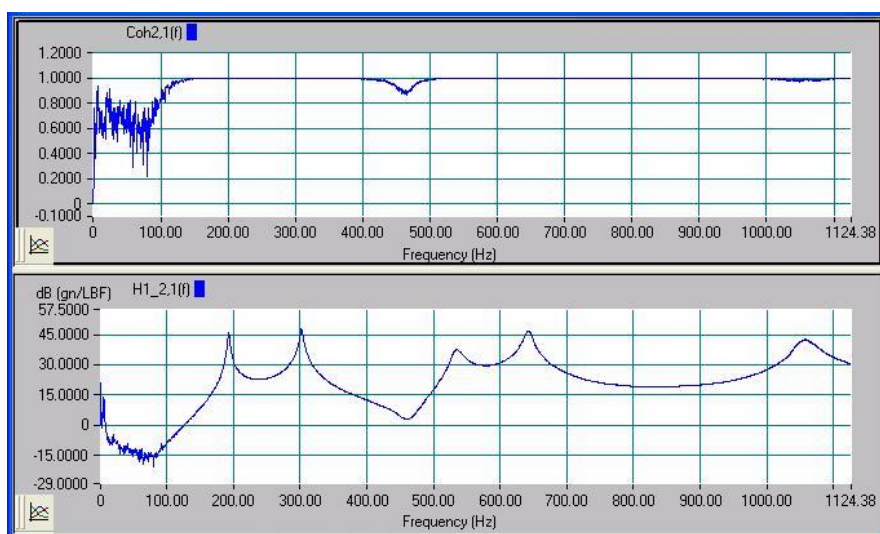


图3 第一种情况下的单次锤击的FRF（下）和相干（上）



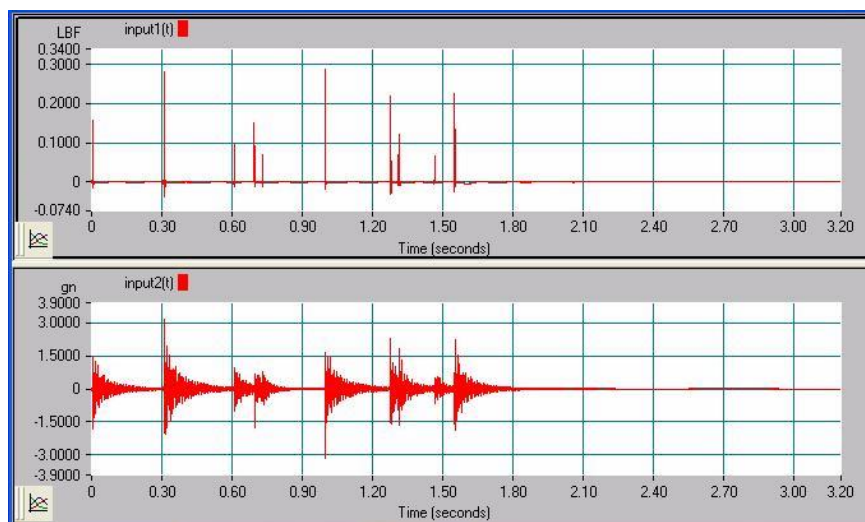


图4 第二种情况下的多次锤击的激励（上）和响应信号（下）

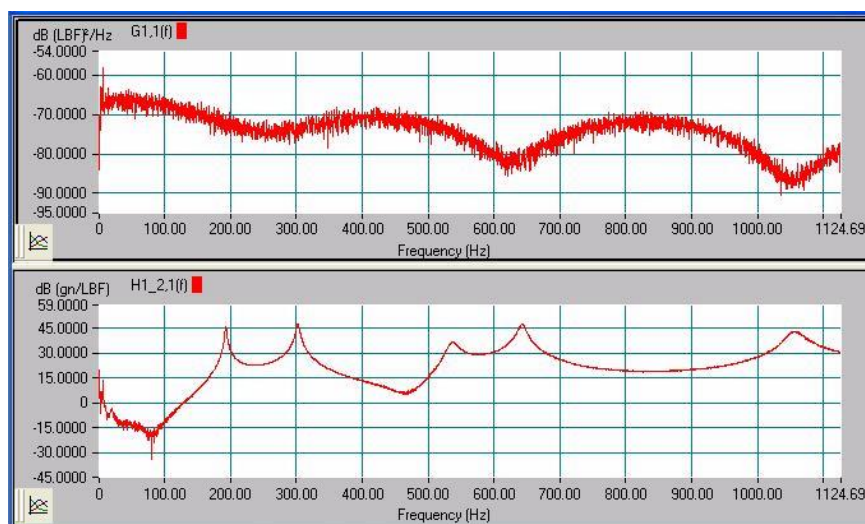


图5 第二种情况下的多次锤击的FRF（下）和输入功率谱（上）

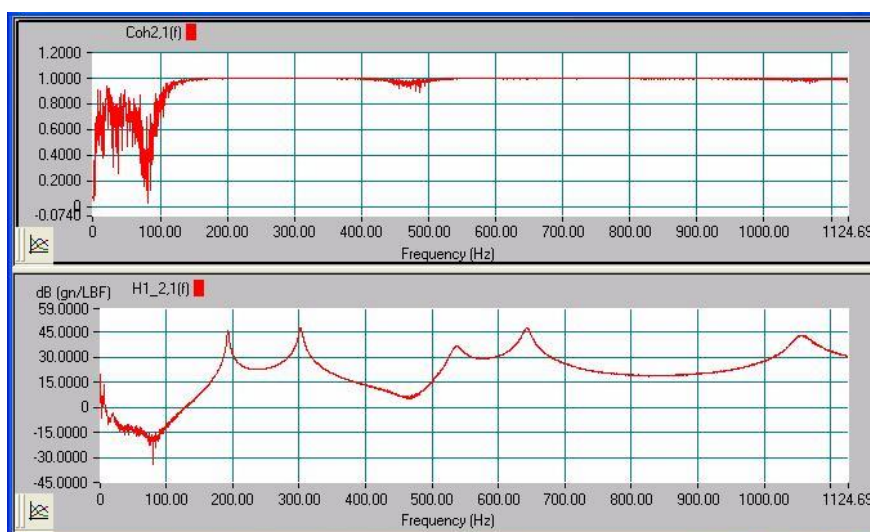


图6 第二种情况下的多次锤击的FRF（下）和相干（上）



能描述一下互易性吗？我还是不理解。  
这经常让人感到迷惑。

好，让我们探讨一下模态测试FRF测量的互易性。互易性是模态测试中非常重要的一项，人家会说到这个词语，但是他们有时并不真的相信它，主要是因为进行FRF测量时，有太多的原因使得实际测量的FRF不满足互易性的理论要求。

首先让我们简要地陈述一下互易性是什么。对图1所示结构上的“i”和“j”点进行了一次输入输出测量。第一次测量在“i”点施加激励力，测量“j”点响应。第二次测量，力施加在“j”点，测量“i”点的响应。根据互易性原理可知， $h_{ij}=h_{ji}$

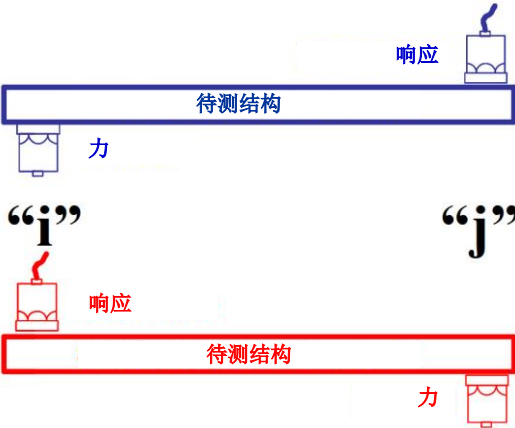


图1 互易性测量示意图

测量FRF矩阵中完整的一行和一列，如图2所示。几个互易性测量在该矩阵中高亮突出显示。

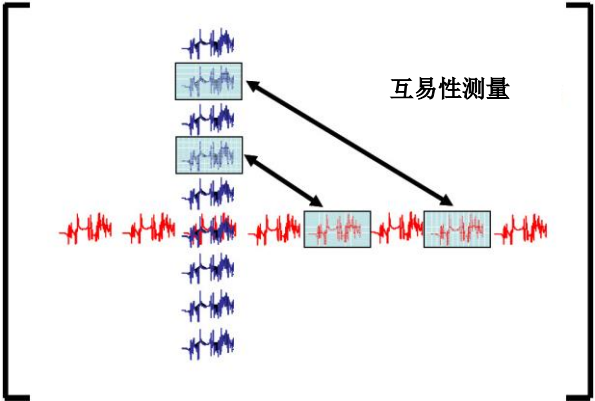


图2 FRF矩阵互易元素

当然，你第一次对不熟悉这个概念的人解释互易性，可能你也不知道从何开始讲起。因此，我试图从描述系统的基本方程入手，解释互易性（在这儿，为了说明互易性，不得不



涉及到一些理论)。

首先，从多自由度系统的基本运动方程入手，矩阵形式的方程表示为

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{F}(\mathbf{t})\}$$

需要着重注意的是这些矩阵（针对某个结构系统）是对称的方阵。这即表明下标为“ij”项和下标为“ji”项是相同的。

现在将上面的物理运动方程变换到拉氏域。假设初始状态为零，那么方程为

$$[[\mathbf{M}]s^2 + [\mathbf{C}]s + [\mathbf{K}]]\{\mathbf{X}(s)\} = \{\mathbf{F}(s)\}$$

当然，我们必须认识到这些矩阵中的每一个也都是对称的方阵。在这个拉氏运动方程中，系统矩阵 $[\mathbf{B}(s)]$ 和它的逆矩阵，即系统传递函数 $[\mathbf{H}(s)]$ 也是对称的方阵。这时：

$$[\mathbf{B}(s)]^{-1} = [\mathbf{H}(s)] = \frac{\mathbf{Adj}[\mathbf{B}(s)]}{\det[\mathbf{B}(s)]} = \frac{[\mathbf{A}(s)]}{\det[\mathbf{B}(s)]}$$

进行一些处理，可以将系统传递函数写成以部分分式形式表示的所有单个模态之和，形式为

$$[\mathbf{H}(s)] = \sum_{k=1}^m \left( \frac{[\mathbf{A}_k]}{(s - p_k)} + \frac{[\mathbf{A}_k^*]}{(s - p_k^*)} \right)$$

频响函数是系统传递函数沿频率轴 $s=j\omega$ 的估计，其形式为

$$[\mathbf{H}(s)]_{s=j\omega} = [\mathbf{H}(j\omega)] = \sum_{k=1}^m \left( \frac{[\mathbf{A}_k]}{(j\omega - p_k)} + \frac{[\mathbf{A}_k^*]}{(j\omega - p_k^*)} \right)$$

记得留数矩阵 $[\mathbf{A}(s)]$ 也是对称的方阵，因为所有矩阵的最终形式都是对称方阵。

单个输入输出位置“ij”的测量，频响函数可以写成

$$h(s)_{ij}|_{s=j\omega} = h_{ij}(j\omega) = \sum_{k=1}^m \left( \frac{a_{ijk}}{(j\omega - p_k)} + \frac{a_{ijk}^*}{(j\omega - p_k^*)} \right)$$

展开到前三阶模态项

$$h_{ij}(j\omega) = \frac{a_{ij1}}{(j\omega - p_1)} + \frac{a_{ij1}^*}{(j\omega - p_1^*)} + \frac{a_{ij2}}{(j\omega - p_2)} + \frac{a_{ij2}^*}{(j\omega - p_2^*)} + \frac{a_{ij3}}{(j\omega - p_3)} + \frac{a_{ij3}^*}{(j\omega - p_3^*)}$$

但是，在这个形式的方程中，互易性不明显，因此，需要拓展方程的留数形式。我们记得，系统的第k阶模态的留数矩阵可从奇异值分解得到，写成

$$[\mathbf{A}(s)]_k = \mathbf{q}_k \{\mathbf{u}_k\} \{\mathbf{u}_k\}^T$$

或者展开成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11k} & \mathbf{a}_{12k} & \mathbf{a}_{13k} & \cdots \\ \mathbf{a}_{21k} & \mathbf{a}_{22k} & \mathbf{a}_{23k} & \cdots \\ \mathbf{a}_{31k} & \mathbf{a}_{32k} & \mathbf{a}_{33k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \mathbf{q}_k \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{1k} \mathbf{u}_{1k} & \mathbf{u}_{1k} \mathbf{u}_{2k} & \mathbf{u}_{1k} \mathbf{u}_{3k} & \cdots \\ \mathbf{u}_{2k} \mathbf{u}_{1k} & \mathbf{u}_{2k} \mathbf{u}_{2k} & \mathbf{u}_{2k} \mathbf{u}_{3k} & \cdots \\ \mathbf{u}_{3k} \mathbf{u}_{1k} & \mathbf{u}_{3k} \mathbf{u}_{2k} & \mathbf{u}_{3k} \mathbf{u}_{3k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

并且这个形式可以简化写成

$$h(s)_{ij} \Big|_{s=j\omega} = h_{ij}(j\omega) = \sum_{k=1}^m \left( \frac{q_k u_{ik} u_{jk}}{(j\omega - p_k)} + \frac{q_k^* u_{ik}^* u_{jk}^*}{(j\omega - p_k^*)} \right)$$

关心前三阶模态，可以展开写成

$$h_{ij}(j\omega) = \frac{q_1 u_{i1} u_{j1}}{(j\omega - p_1)} + \frac{q_1^* u_{i1}^* u_{j1}^*}{(j\omega - p_1^*)} + \frac{q_2 u_{i2} u_{j2}}{(j\omega - p_2)} + \frac{q_2^* u_{i2}^* u_{j2}^*}{(j\omega - p_2^*)} + \frac{q_3 u_{i3} u_{j3}}{(j\omega - p_3)} + \frac{q_3^* u_{i3}^* u_{j3}^*}{(j\omega - p_3^*)}$$

互易性在这种形式下能很容易地得到体现。因为，留数恰恰是自由度*i*的模态振型值乘以自由度*j*的模态振型值（还有少数几个常数项）。这意味着不管我们是在“*i*”点还是“*j*”点测力，在另一个点测量响应，都没有关系，因为在这个输入输出位置得到的模态振型的乘积总是相同的。因此，互易性刚好体现在此。作为实例，考虑如图3所示的一个简单的3×3的FRF矩阵的幅值图。显然，在这个矩阵中很容易看出互易性来。注意，实部、虚部和相位也是对称的，但是这儿没有给出。

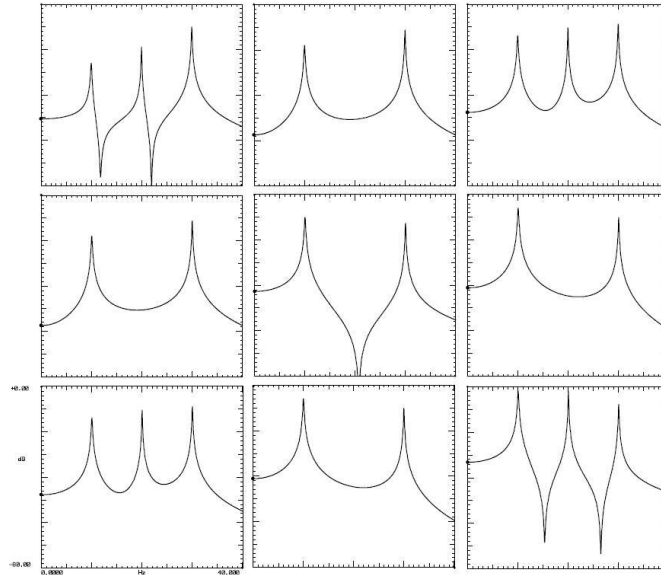


图3 FRF的幅值矩阵

当然，这是理论上的描述，并且肯定成立。然而，现实中可能FRF不会一直都满足这个条件，这将在以后的篇章中加以讨论。

我希望这些讨论能消除你对为什么互易性一定成立的迷惑。虽然给出了一些理论方程，但是为了说明互易性成立，必须要用到它们。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



我们真的需要一个精确的校正过的模型吗？如果模型不完美，有什么影响？  
我有一些非常合适的实例可以说明这一点。

模型校正是开发一个精确的系统模型过程中重要的一步。如果建模过程中系统任何一个部件不正确，那么系统的总体特征将不精确。当然，需要有人根据系统的响应定义哪些是可接受的，哪些是不可接受的。但这又是另一方面的问题了。

在这儿我想要说的是与系统响应相关的部件频率的影响。通常，部件建模和校正比整个系统更容易。事实上，开发一个系统模型最大的问题在于边界条件和系统模型中各部件之间的相互作用。因此，在这儿我想强调的是系统模型中各部件彼此之间的相互关系。当然，描述所有这些关系有多种方法，但在这儿，我想以一种非常简单的方式确定这些关系。首先，考虑单自由度的调谐吸振器，然后考虑模态复杂的多自由度系统。

首先，根据部件的质量和刚度、或者它的模态特征、或者频率响应特征来讨论这个部件的简单描述。图1展示了一个部件的有限元模型的概念模型，用质量和刚度来描述这个部件。但在这种形式中，不方便解释各阶模态是怎样影响部件整体的。部件的特征值求解将复杂的质量和刚度描述的系统简化成一组更简单的单自由度系统，这些单自由度系统是线性无关、彼此正交的。图1的下部分表明，这个部件可以描述成一组单自由度系统和每阶系统模态的频响函数。因此，如果能理解模态特征，那么也就明白这个部件的特征了。

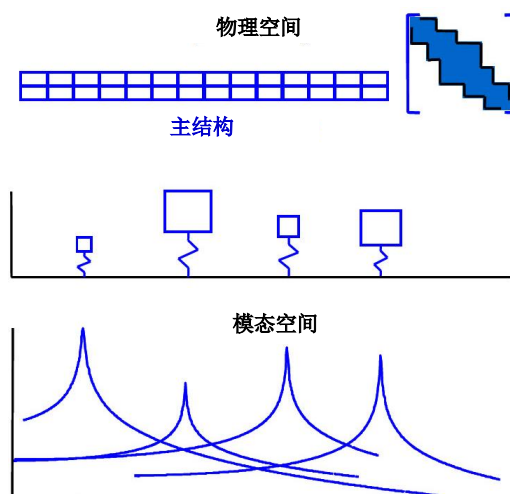


图1 一个部件的物理和模态描述

现在如果另一个弹簧-质量系统（假设该系统的频率与部件的任一固有频率都不相同）附加到这个部件上，那么会发生什么情况呢？图2表明，增加的弹簧-质量系统对部件原始模态的影响非常小。但是如果弹簧-质量系统与部件的某一阶模态“调谐”（即等于某一阶固有频率），会发生什么情况？

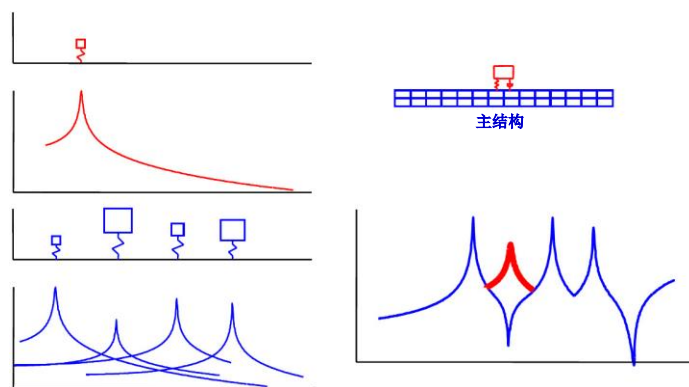


图2 部件上附加不调谐的弹簧-质量系统

如果弹簧-质量系统的频率刚好与部件的某一阶模态频率相同时，图3表明它对频响的影响，图4表明附加到部件上的两个弹簧-质量系统与部件的某两阶模态频率相同时，对频响的影响。对于一个调谐的弹簧-质量减振器而言，这些影响恰好是希望出现的。在增加的弹簧-质量系统和部件各阶模态之间存在动力学相互作用。

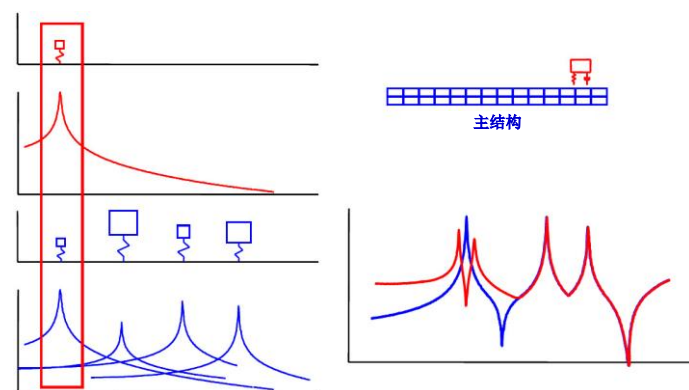


图3 带调谐的弹簧-质量系统的部件

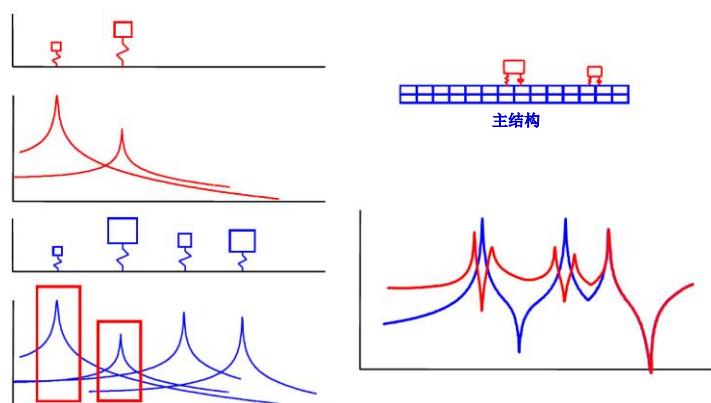


图4 带两个调谐的弹簧-质量系统的部件

因此，从图3和图4的这两个示例中，可以清楚地看出，如果选定的弹簧-质量系统的频率刚好与部件的某一阶模态频率相同，那么部件的动力学特征将发生显著改变。然而，如果弹簧-质量系统的频率没有选择正确（如图2所示），那么，在附加的弹簧-质量系统和部分之间没有明显动力学耦合。

现在我们已经有了了一些了解，让我们考虑由两个部件耦合形成一个系统模型。替代考虑两个部件的质量和刚度矩阵，考虑模态空间的模态质量/弹簧系统或者一组单自由度频响函数会更有利些。

图5表明了部件A和部件B的这种表示形式。为了使这两个部件出现适当的耦合，必须合理指定这两个部件的每阶模态。在图5中，部件A的各阶模态不与部件B的各阶模态靠近，因此，两个部件之间没有显著的动力学耦合。

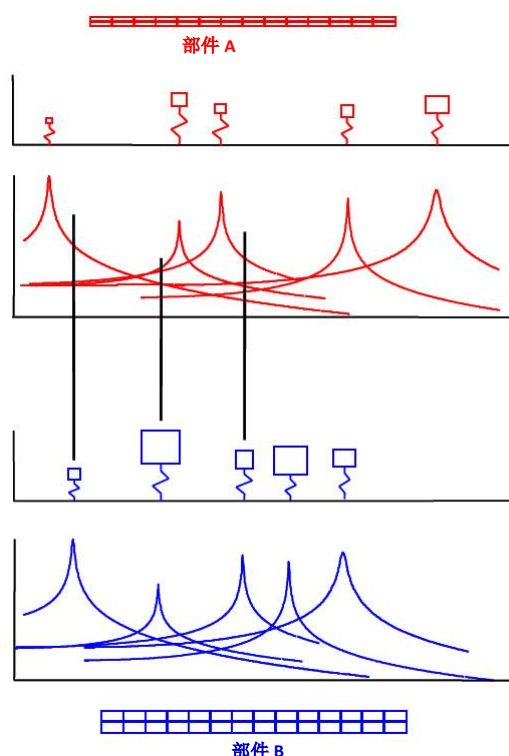


图5 两个部件物理耦合

但是如果任一个部件的各阶模态选择不正确，实际上各阶模态彼此之间非常靠近，将发生什么状况？那么这两个部件之间将存在严重的动力学耦合，不管是两个部件的哪一阶模态相同。两个部件的耦合严重依赖两个系统的频率的相对关系。因此，必须合理地确定各个部件的模态，正确的动力学耦合才能存在于装配的系统模型中。

我希望这些有助于说明为什么每个部件的模态必须正确确定。为了合理地确定部件的动力学特征，必须校正部件的各阶模态。只考虑质量和刚度矩阵，对于为什么要正确确定各阶模态，似乎不直观。通过在模态域或者频域描述部件，需要校正部件模型更直观。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



我对自由-自由系统进行刚度修改，弹性模态降低了，为什么？  
这需要探讨一下。

这是一个相当模糊的陈述，几乎会使任何人都感到头疼。我想我们首先需要描述在这种情况下到底发生了哪些改变。在这不使用你最初描述这个问题的数据，而是使用一个简单的自由梁系统来描述发生的变化。

一根自由-自由的梁系统将用于描述这个问题，首先对自由-自由梁进行测试，然后将这个自由梁两端部约束住。进行的动力学修改是约束两端自由的梁系统，得到的弹性模态低于自由状态的弹性模态。

当然，如果你增加任何系统的刚度，人人都会指出模态频率肯定增大，这是因为

$$\omega_{\text{初始}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

如果刚度增加，那么

$$\omega_{\text{修改后}} = \sqrt{\frac{k + k_{\text{增加}}}{m}}$$

所以，频率显而易见会增大，而实际情况是模态频率反而降低了，这是没有道理的。

因此，让我们着手分析和测试一根自由-自由的简单梁系统。自由-自由梁前三阶模态分别为164Hz、452Hz和888Hz，平面自由-自由梁系统的前三阶模态，如图1所示。

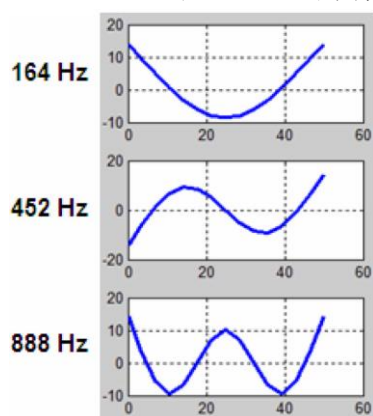


图1 自由-自由梁的弹性模态

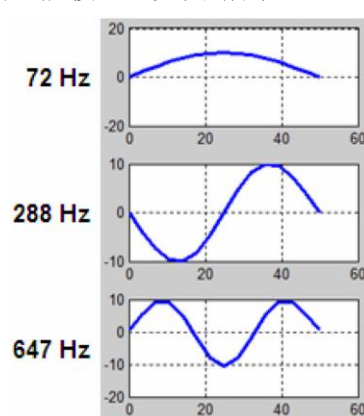


图2 自由-自由梁的约束模态

将自由-自由梁约束住，对其进行测试，前三阶模态分别为72Hz、288Hz和647Hz。平面梁的约束模态，如图2所示。显然，模态频率没有如预期的那样向上移动。因此，这到底是怎么回事？这是一个非常简单的问题，但是，多年来这个问题我已听说过多次，不可避免，这个问题以后还会存在。

通常，人们关心的是系统的弹性模态，因为这些模态通常会引起我们所遭遇的所有振动



和噪声问题。但是，描述整个系统的不仅仅是这些弹性模态。

这儿的基本问题是每个人都忽略了自由边界的系统不仅具有弹性模态，还具有刚体模态。很多时候，测试过程中人们不测量刚体模态，刚体模态不作为弹性模态测试的一部分。而从分析角度考虑，很多时候进行的特征值求解，要么只求解变动的特征值问题，要么只获得弹性模态。

虽然刚体模态存在，但是很多时候人们忽略了它们，这主要是因为他们不是我们关心的振动和噪声问题产生的根源。因此，图3给出了这个自由-自由梁系统的刚体模态和弹性模态，这样更合理些。因此，一旦我们意识到这个梁系统从分析模态上得到的第一阶模态频率是0Hz或者从实测得到第一阶模态频率非常小，那么直觉告诉我们增加刚度，模态频率向上移动就合乎情理了。表1给出了自由-自由梁的弹性模态和刚体模态频率，同时也给出了梁系统两端约束后的模态频率。

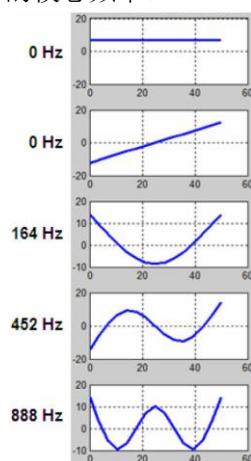


图3 带有刚体模态的自由梁弹性模态

所以，基本事实就是不能忽略刚体模态，它们是完整描述梁系统的一部分。现在注意到表1中的所有模态随着刚度的增加，频率都往上移动了。

证明这个的一个方法是你自己制作一根简单的自由-自由梁模型，接下来的模型是在梁两端安上非常软的弹簧。然后增加梁模型的弹簧刚度，直到最终弹簧的刚度接近端部约束的梁为止。

按照这个方法，将易于察看梁的模态振型变化。当支承梁的弹簧非常软的时候，其模态振型看起来非常像刚体模态。但是随着支承刚度的增加，频率将增大，并且模态振型将从刚体模态向另一些模态移动，这些模态具有一些刚体模态成分，同时具有更多的弹性属性。当支承弹簧的刚度变得越来越大时，刚体特性将逐渐消失，伴随的是弹性特性越来越强势。最终，刚体特性将消失，弹性模态振型完全支配结构的模态振型。

这一小实例将清楚的表明刚体模态也是描述系统模态的重要组成部分。我希望这个简单的实例能消除你的误解。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。

表1 自由梁和两端约束梁的模态

模态	自由	约束
1	0	72
2	0	288
3	164	647
4	452	
5	888	



改变悬臂梁自由端的刚度，只能使频率移动一定距离，怎么回事？  
这个问题需要探讨。

这个问题是我经常听到的迷惑人的众多问题中的一个。让我们从简单的悬臂梁开始，解释这个系统内在的一些基本属性。

首先，使用有限元模型研究悬臂梁自由端刚度改变的影响。图1展示了悬臂梁、自由端加有弹簧的悬臂梁和自由端约束住的悬臂梁。使用有限元模型研究自由端弹簧刚度由低变高引起悬臂梁怎样的变化。

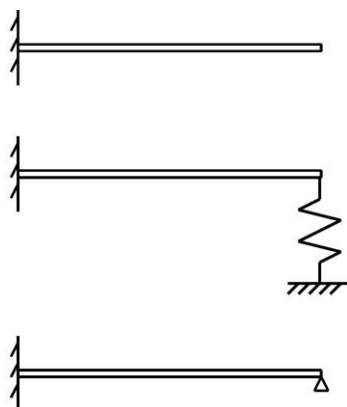


图1 悬臂梁、自由端加弹簧和被约束住的悬臂梁

表1给出了悬臂梁前三阶模态，以及随着弹簧刚度的增加的频率变化结果，如果弹簧的刚度无限大，则其结果等同自由端约束的结果。着重注意到随着弹簧刚度的增加，最终的频率收敛于自由端约束住的结果。

因此，这意味着不管悬臂梁自由端弹簧刚度增加多大，只能使频率移动一定距离，然后再增大任何刚度的对频率移动影响很微弱，这时是一个收益递减过程。

表1 悬臂梁自由端不同条件（自由、弹簧和约束住）下的频率

条件	1阶	2阶	3阶
悬臂梁	58	363	1017
$K=1e1$	68	365	1018
$K=1e2$	123	382	1024
$K=1e3$	224	546	1092
$K=1e4$	251	787	1544
$K=1e5$	254	820	1705
$K=1e6$	254	823	1718
约束住	254	823	1720

现在让我们进一步考虑悬臂梁，察看自由端的响应。对悬臂梁自由端进行驱动点测量，频率响应函数如图2所示。

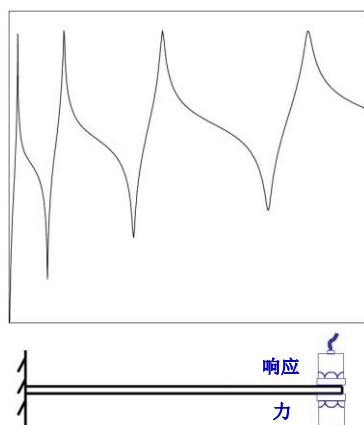


图2 悬臂梁自由端的驱动点FRF

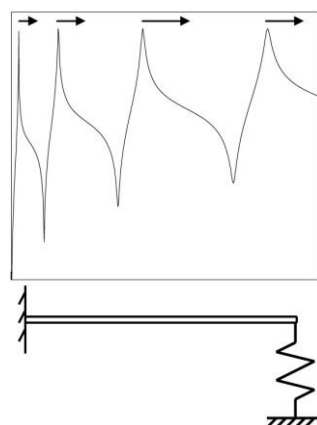


图3 弹簧导致频率移动

让我们考察频响函数和讨论这个函数不同的部分。在固有频率处，频响函数有共振峰。本质上在共振频率区域，使用很小的力就能引起很大的响应。似乎在共振频率处，结构貌似没有明显的刚度。

在反共振峰处，即使施加再大的力，本质上响应也很微弱或没有响应。在反共振频率处，似乎结构刚度无穷大。这就是说在反共振频率处，结构没有位移，在那个反共振频率处似乎悬臂梁在那个点被约束住了。

如果改变悬臂梁自由端的刚度，则会引起频响函数峰值移动。如果梁自由端的刚度增加，那么频响函数峰值将会向上移动，如图3所示。但是，随着刚度的增加，系统频率的移动存在界线。如果我们认识到反共振频率实际上是悬臂梁自由端位移为0的频率，那么显然在这些频率处如同梁自由端被约束住一样，如图4所示。从这个示意图中可清楚地认识到未受约束的悬臂梁的频率峰值绝不可能移动通过悬臂梁的反共振频率，这是因为反共振频率实质上是悬臂梁自由端受约束下的频率。

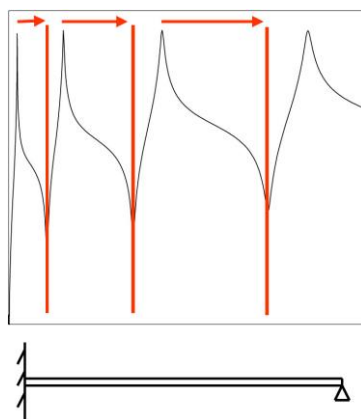


图4 受约束时频率最大的移动量

因此，从这次讨论应该能使你明白，当悬臂梁的自由端加有弹簧时，只能引起结构频率在一定范围内移动。更进一步，我们实际上通过观察未受约束的悬臂梁自由端的反共振频率也能确定这些共振频率移动的距离。

我希望这次讨论能消除有关为什么共振频率只能移动到一定距离的迷惑。证明它的最好方法是你自己生成一个简单的有限元模型，然后检查相应的结果。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



如果激振器激励与整体坐标系成一定角度, 怎样将激励力分解到各个方向?  
等等——在你采集数据之前, 我们需要讨论。

事实就是你真的不需要将激励力分解到整体坐标系下各个方向的力分量。有一个比较简单的方法能说明这一点。但在我们解释这个问题之前, 首先让我们来讨论一些基础知识。

首先需要理解的是, 即使你能将激励力分解成整体坐标系中的两个分离的分力, 实际上你也得不到两个独立分离的分力, 这两个分力与施加到结构的这个独立激励力是线性相关的。因此, 即使你能将激励力分解成多个分量的形式, 但是这样做没有好处。让我们思考的是, 我们为什么会有将激励力分解的想法。

让我们讨论一个振型方向性非常明显的结构, 如图1所示。我解释一下结构振型具有方向性的含义。那意味着结构某一阶模态的响应主要在一个方向, 另一个方向响应很微弱或者没有响应。而另一阶模态的响应主要是另一个方向, 在前一个方向上结构的响应很微弱或者没有响应。从图1中的1阶和3阶模态可以看出这一点, 注意到这两阶模态振型主要是在水平方向, 垂直方向几乎没有运动。但是如果考虑2阶、4阶、5阶和6阶模态, 发现振型主要在垂直方向运动, 水平方向的运动很微弱。

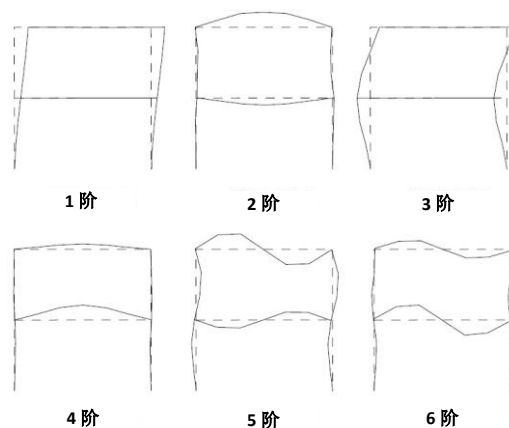


图1 模态振型具有强方向性

所以, 如果我们想在结构上为模态测试选择一个参考点, 同时又限制参考点要么位于水平方向 (X), 要么位于垂直方向 (Y), 那么选择起来比较困难。因此, 我可能为本次模态测试选择一个与整体坐标系成一定角度的参考点。出于讨论目的, 我们假设仅关心结构前四阶模态。假设第一次模态测试, 选择一个x方向的参考点, 第二次模态测试, 选择一个y方向的参考点, 分别写出各自的方程。(最后, 我们将写出倾角参考点的方程, 以展示在一次模态测试中, 怎样为所有的模态选择合适的参考点。)

现在需要着重讨论的是驱动点测量的重要性, 以及驱动点测量怎样与描述留数和模态振型的方程发生关联。让我们回想一下频响函数方程

$$h_{ij}(j\omega) = \sum_{k=1}^m \left( \frac{a_{ijk}}{(j\omega - p_k)} + \frac{a_{ijk}^*}{(j\omega - p_k^*)} \right)$$

我们记得对于某一特定测量自由度，留数直接与模态振型（和比例因子 $q$ ）相关，如

$$a_{ijk} = q_k u_{ik} u_{jk}$$

或者对于所有的测量自由度，其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11k} & \mathbf{a}_{12k} & \mathbf{a}_{13k} & \cdots \\ \mathbf{a}_{21k} & \mathbf{a}_{22k} & \mathbf{a}_{23k} & \cdots \\ \mathbf{a}_{31k} & \mathbf{a}_{32k} & \mathbf{a}_{33k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \mathbf{q}_k \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{1k} \mathbf{u}_{1k} & \mathbf{u}_{1k} \mathbf{u}_{2k} & \mathbf{u}_{1k} \mathbf{u}_{3k} & \cdots \\ \mathbf{u}_{2k} \mathbf{u}_{1k} & \mathbf{u}_{2k} \mathbf{u}_{2k} & \mathbf{u}_{2k} \mathbf{u}_{3k} & \cdots \\ \mathbf{u}_{3k} \mathbf{u}_{1k} & \mathbf{u}_{3k} \mathbf{u}_{2k} & \mathbf{u}_{3k} \mathbf{u}_{3k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

因此，如果我们选择一个位置作为参考点，例如 $7x$ ，并且测量24个位置的 $x$ 和 $y$ 方向响应，那么对于某一阶模态，此次测量数据组可以写成

$$\begin{Bmatrix} a_{1x7x} \\ a_{1y7x} \\ a_{2x7x} \\ a_{2y7x} \\ a_{3x7x} \\ \vdots \\ a_{7x7x} \\ \vdots \\ a_{24x7x} \\ a_{24y7x} \end{Bmatrix} = q u_{7x} \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ \vdots \\ u_{7x} \\ \vdots \\ u_{24x} \\ u_{24y} \end{Bmatrix}$$

那么，我们可以看出在 $7x$ 处的驱动点测量需要通过下式缩放留数，得到缩放的模态振型

$$a_{7x7y} = q u_{7x} u_{7y}$$

但是，我们不得不想到，从 $x$ 方向的这个参考点（ $7x$ ）仅能得到1阶和3阶模态，因为这两阶模态仅在 $x$ 方向运动，而2阶和4阶模态仅在 $y$ 方向运动，因此如果参考点沿 $x$ 方向，那么将不能测量到2阶和4阶模态。

为了测量到2阶和4阶模态，必须有一个沿 $y$ 方向的参考点。当然，为了得到 $y$ 方向的模态需要进行第二次测量。如果在 $y$ 方向选择参考点，比如 $20y$ 点，那么相对于这个参考点的方程如下，并且使用 $20y$ 的驱动点测量得到缩放的模态振型，方程如下

$$\begin{Bmatrix} a_{1x20y} \\ a_{1y20y} \\ a_{2x20y} \\ a_{2y20y} \\ a_{3x20y} \\ \vdots \\ a_{20y20y} \\ \vdots \\ a_{24x20y} \\ a_{24y20y} \end{Bmatrix} = q u_{20y} \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ \vdots \\ u_{20y} \\ \vdots \\ u_{24x} \\ u_{24y} \end{Bmatrix} \quad \text{和} \quad a_{20y20y} = q u_{20y} u_{20y}$$

但是，考虑这两个参考点，就要求模态测量必须进行两次。另一个方法是在结构上选择一个与整体坐标成一定角度的位置作为参考点，如99s点，测量该点的力和加速度响应，得到该驱动点的FRF。输入力的示意图如图2所示。这个参考点可以是结构上任意一点，任意一个角度，只要该位置能激励起结构所有感兴趣的模态即可。

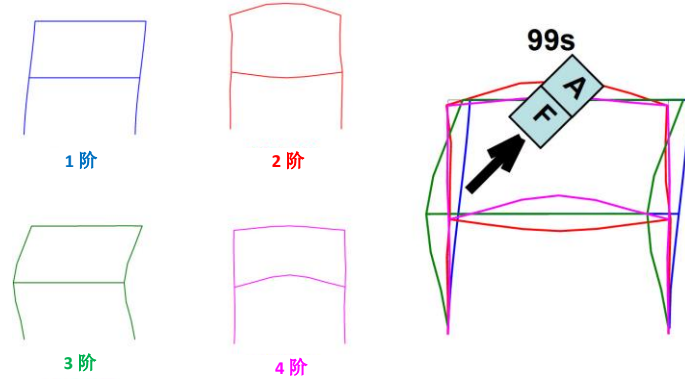


图2 倾角激励下的模态测试

对于这组倾角测量，相对于参考点99s的相关方程和驱动点测量如下

$$\begin{Bmatrix} a_{1x99s} \\ a_{1y99s} \\ a_{2x99s} \\ a_{2y99s} \\ a_{3x99s} \\ a_{3y99s} \\ a_{4x99s} \\ a_{4y99s} \\ \vdots \\ a_{99s99s} \end{Bmatrix} = q \mathbf{u}_{99s} \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ u_{4x} \\ u_{4y} \\ \vdots \\ u_{99s} \end{Bmatrix} \quad \text{和} \quad a_{99s99s} = q \mathbf{u}_{99s} u_{99s}$$

因此，一旦使用驱动点测量进行模态振型缩放，那么真的没有必要在模态振型描述中包含参考点。这恰好是获得缩放的模态振型非常便捷的一种方法，甚至在实际的模态振型的几何描述中都不需要包含倾角驱动点测量。但是，当然，必须铭记的是倾角参考点位置必须合适，能从这个参考点位置观测到所有模态。

我希望这个解释有助于帮助你理解可以选择任一角度作为参考点，只要该点不是模态节点。因而你可以使用这个倾角参考点位置作为驱动点，用于系统模态振型缩放。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





传递函数沿频率轴估计时，阻尼为0，这是否意味着系统没有阻尼？  
让我来澄清这个迷惑点。

我发现这个问题迷惑过许多人，因此，让我们来谈谈它，并解释这其中发生的实际情况。我将沿着这个方向讨论少数几项因素，作为讨论的一部分。

首先，让我以部分分式的形式写出系统的传递函数

$$h(s) = \frac{a_1}{(s-p_1)} + \frac{a_1^*}{(s-p_1^*)}$$

并且意识到对于欠阻尼系统的传递函数的根或者极点可以写成

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

因为传递函数是复值函数，所以函数的根将是两个变量 $\sigma$ 和 $\omega$ 的函数，这两个变量分别为这个根的实部和虚部。分子称为系统传递函数的留数（命名为留数是因为它来自于留数定理，用它来估计传递函数）。

现在我们绘出这个函数所对应的曲线图，该图将映射成一个曲面，因为这个函数是通过两个独立变量 $\sigma$ 和 $\omega$ 定义的。因此，如果我们保持 $\sigma$ 不变， $\omega$ 变化，然后逐渐递增变化 $\sigma$ ，并重新计算 $\omega$ 的范围，那么将产生一个复数值的矩阵。因为这些数值是复数，我们可以分别绘出它们的实部和虚部图，当然也可以绘出函数的幅值和相位图。无论如何，可以用这些形式中的任何一个来绘制这个曲面，用于描述系统的传递函数。

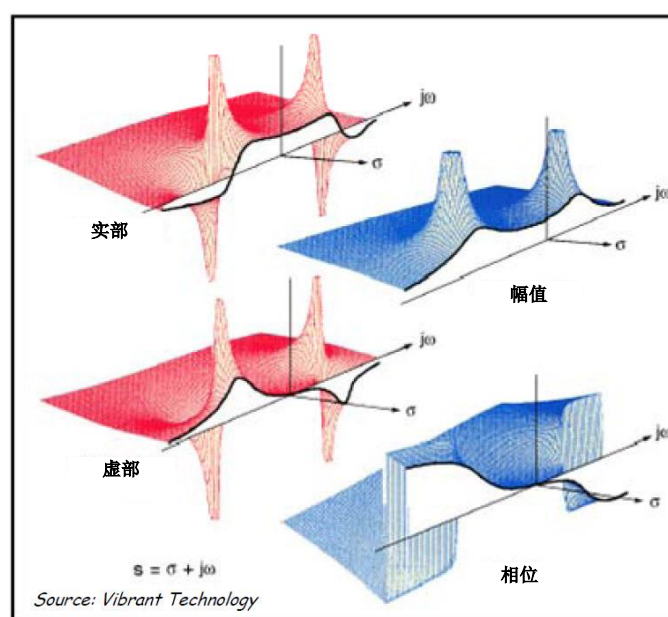


图1 系统传递函数

这些图如图1所示（来自Vibrant Technology网页）。我们可以讨论系统传递函数的每一个子项（实部和虚部；幅值和相位），但在这儿只想关注传递函数的幅值。（我们需要始终记住这是一个复数值函数，可以用实部和虚部，或者幅值和相位描述这个函数。）

因此，当我们说我们在 $\sigma=0$ 估计这个函数时，我们不是真的说阻尼是0，而是说传递函数沿频率 $j\omega$ 轴估计。

现在，如果传递函数沿 $j\omega$ 轴（频率轴）估计，那么我们可以写出频响函数，形如

$$h(j\omega) = h(s)|_{s=j\omega} = \frac{a_1}{(j\omega - p_1)} + \frac{a_1^*}{(j\omega - p_1^*)}$$

如果我们考虑系统传递函数的幅值沿 $j\omega$ 轴估计，并且将其投影到沿 $j\omega$ 轴的切片平面上，那么我们将看到如图2所示的投影切片。而这正好是我们用FFT分析仪测量得到的曲线：频响函数。并且我们可以看出这只使用一个独立变量 $\omega$ 描述频响函数。同时，我们也注意到我们仅用一条曲线，而不是一个曲面来描述系统的传递函数。

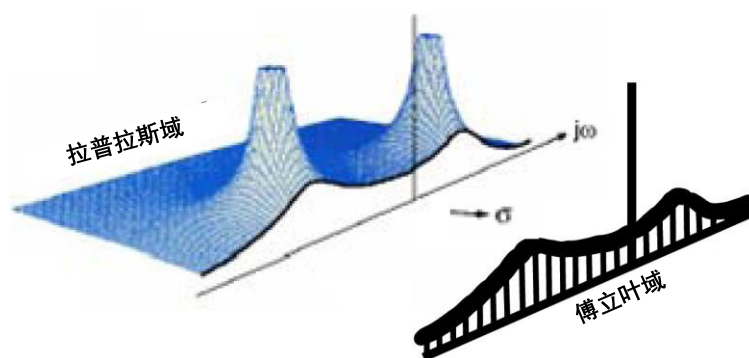


图2 系统传递函数（幅值）和频响函数

我们已经明白频响函数由何得来了，那么现在我们来描述沿频率轴的切面图和系统传递函数曲面。这个曲面看起来像一顶带有两个顶的帐篷，所以，我想这个类比一场在帐篷底下带有座位排列的婚礼现场。我们知道座位排列有两方，一方是新娘方嘉宾，另一方是新郎方嘉宾（极点和极点的共轭）。现在你可以坐在这两方的任一方，依赖于你是婚礼哪一方的来宾。

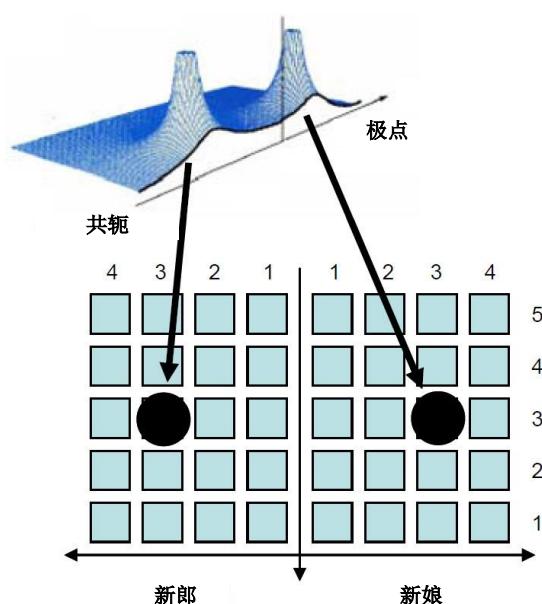


图3 座位分布图描述法

让我们假设你来自于新娘这一方，且坐在第二行第一个座位上。当你坐下以后，向上看，你会发现帐篷顶部距你头顶的高度是确定的（特定 $\sigma$ 和 $\omega$ 值下的幅值）。你同时将发现你所在的座位有一个对称的镜像在新郎那一方的第二行第一个座位（共轭），并且这个座位距帐篷顶部的高度与你所在的座位距帐篷顶部的高度相同。但我们假设有另一个人坐在新娘这一方的第三行第二个座位上。在这个座位上，帐篷的高度高于前面你坐的位置处帐篷的高度。当然，在新郎的一方同样有一个对称的高度相同的镜像位置。

因此，每一个座位距帐篷顶都有特定的高度，这个高度映射成帐篷顶部曲面。但是你会发现，双方都有一个座位对应帐篷顶点位置，这就类似于一对复值的共轭根。注意到，没有一个人能坐在那个位置，也没人能告诉你那个位置帐篷的高度，这是因为在那个位置的高度是没有定义的。在帐篷顶点（根）处不能确定系统传递函数的幅值，因为在那个位置，它是没有定义的。

因此，这个帐篷比拟方式是系统传递函数的一个形象描述。通过座位分布图确定函数值，幅值改变依赖于位置，系统的传递函数在系统极点或者根处没有定义，这个位置就是帐篷顶点对应的位置，没有人能坐在那个位置确定帐篷的高度或者幅值大小。（我们使用留数定理去估计这个值。）

当然我们知道第一行是最重要的一行，实际上，这一行是傅立叶变换所对应的一行，它是传递函数沿  $j\omega$  轴的估计，是我们从传递函数中取走的切片所对应的曲线。

我希望这些简单的例子有助于让你明白传递函数和频响函数，以及它们彼此之间的关系。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



曲线拟合对我来说像个巫术，能为我解释一下传递函数、FRF和估计的参数吗？  
当然可以，没问题。

曲线拟合初看起来像个巫术，但在这儿我想通过几个简单的类比帮助你理解曲线拟合。其实曲线拟合相当直观，我给出的这些实例的确非常简单。

上次我们讨论一些与系统传递函数和频响函数（FRF）相关的知识。用部分分式的形式写出单自由度的系统传递函数，形如

$$h(s) = \frac{a_1}{(s-p_1)} + \frac{a_1^*}{(s-p_1^*)}$$

同时，频响函数形如

$$h(j\omega) = h(s)|_{s=j\omega} = \frac{a_1}{(j\omega-p_1)} + \frac{a_1^*}{(j\omega-p_1^*)}$$

如果我们观察这两个方程，会发现在第一个方程中独立变量是“s”，第二个方程独立的变量是“ $\omega$ ”，函数“h”依赖于这些变量。但是，我同时也注意到两个常数或者参数为留数“a”和极点“p”。因此，在一些给定的“ $\omega$ ”值定义函数“h”值的这些参数，我们称之为模态参数。

如果我们考虑系统传递函数或者系统传递函数的切片——频响函数，我们必须认识到单自由度的系统传递函数曲面和频响函数曲线仅仅由两个参数定义，也就是极点“p”和留数“a”。因此，观察图1，我们会认识到只有两个参数就定义了系统传递函数曲面和频响函数曲线，这相当令人惊叹！

现在让我们后退一步到一些更简单和更普遍明白的实例。考虑用一根直线拟合一些测量数据。我打算用最小二乘误差最小的方法为图2所示的数据进行拟合。我们知道，对这组数据可以用任何曲线来拟合，但似乎线性拟合最合适。当然，使用的数学模型如

$$y = mx + b$$

这两个参数定义这条直线，也就是斜率和y方向的截距。

对于这个例子，在图2中通过最小二乘法拟合得到两个参数：斜率为12.097和y方向的截距为-0.019。同时认识到这两个参数是由一组测量数据得到的，而这些测量数据存在一些变动，使用最小二乘回归分析确定了最合适的参数，也就是斜率和y方向的截距，用于描述这些测量数据。

因此，如果我们采用相同的逻辑去拟合一个单自由度系统的频响函数，那么我将拟合出频响函数的第一阶模型，频响函数形式如图3中右上角公式所示。如果你观察这个示意性的拟合，你将易于看出由这组数据拟合得到两个参数，即极点和留数。

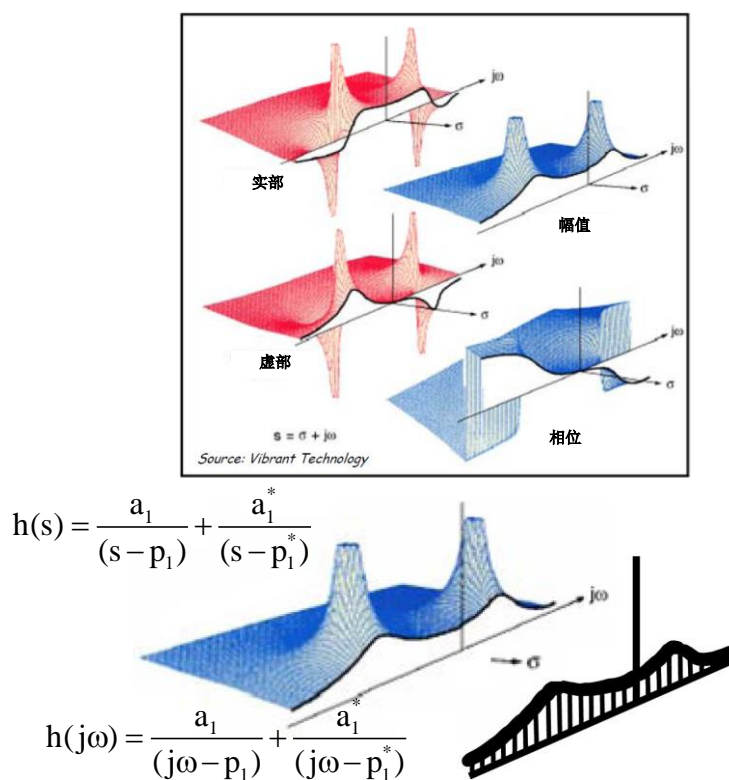


图1 系统传递函数和FRF

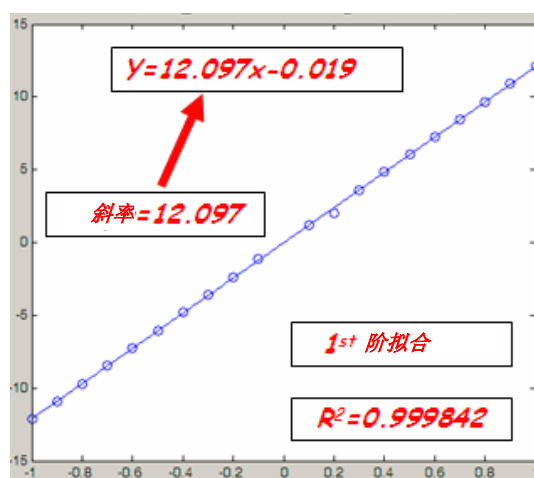


图2 直线拟合的例子

模态中的曲线拟合,除了数据是复数和曲线更复杂外,其实际跟直线拟合相同。原理上,跟直线拟合是相同的方法论。我们在离散数据点测量到的数据是复数形式,那么将这些数据拟合成频响应函数曲线,目的是用最小二乘法找到描述这组数据最合适的参数。

当然图3所示的数据是单自由度系统,这个方法也可以推广到多自由度系统,如图4所示。因此,用这个方法,我们可以对离散的复数值描述的测量数据拟合多阶模态(或者本质上是高阶多项式)。与模态参数估计相关的所有相同的过程在图4中也会遭遇到。

因此,如果你理解了这个直线拟合流程,那么你不得不同意在模态参数估计过程中应用了相同的流程(当然了,模态拟合中这些数都是复数形式,曲线更复杂)。在这两种情况中,本质上是采用最小二乘方法提取参数,用来描述函数。

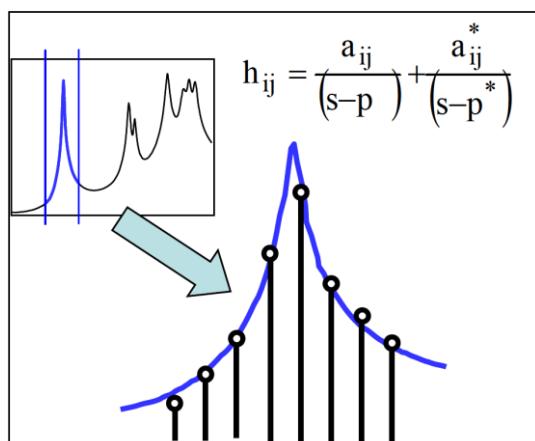


图3 概念上的单自由度拟合

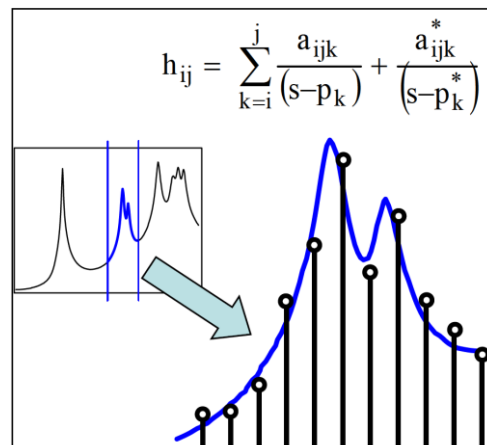


图4 概念上的多自由度拟合

因此，整个曲线拟合过程真的不是巫术。这个过程同直线回归分析是相同的过程。模态参数估计仅仅是简单的直线拟合的延伸。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





锤击测试使用不同的锤头轻锤或重锤是否有影响？  
这需要进行一些讨论。

确实有一些显著的影响，这依赖于你使用的锤头和锤击结构的力度。对于锤击法试验，你确实需要使用力锤来做这项工作。但这不像拿锤头在木质框架上钉钉子。我的意思是，当你握着力锤锤击时，随着你挥动力锤，你的手腕就像一个连接关节。我经常看到一些人在做锤击测试时，挥动力锤幅度极大，锤击真不是这样的方式。（我看到一些锤头像是经历了一次核爆炸一样，损伤很严重。）

我们知道商业上力锤套件有多个不同的锤头可供使用。在这，我尤其关注的重点是少数几个锤头，在使用不同的力度激励结构过程中，相应的力谱有明显的区别。因此，应小心使用这些锤头。在硬的塑料锤头上加气囊和弹性帽，以及硬塑料锤头，对比这三种锤头在不同力度下一些被忽视的影响。

所有情况中，我将锤击一块非常大的重钢板，锤击钢板的力度分为轻锤、中等力度锤击和重锤。第一种情况，评估气囊锤头，然后是硬塑料锤头加装弹性帽，最后是硬塑料锤头。这些锤击的结果（力脉冲和力谱）如下图所示。

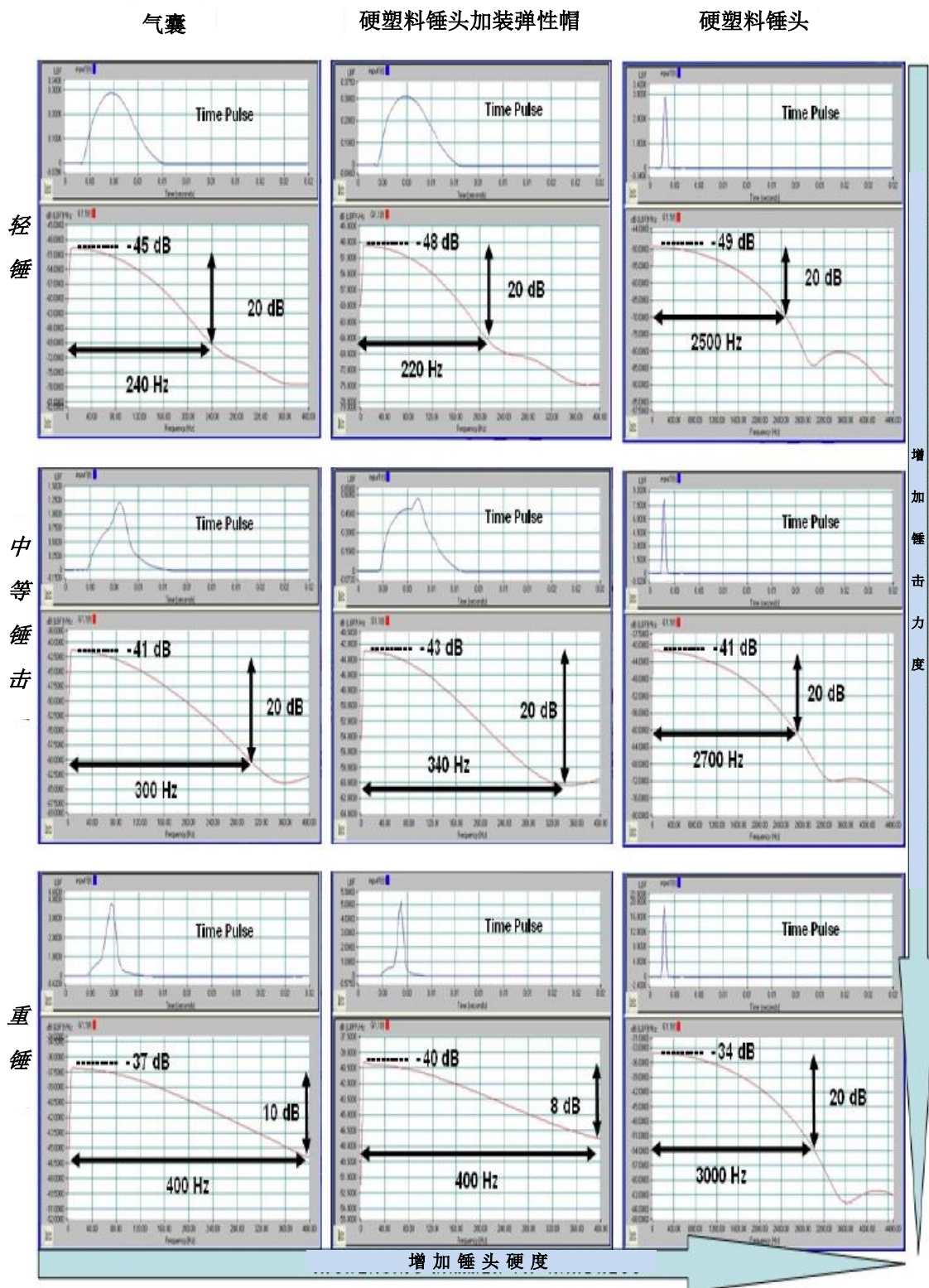
**气囊**——这个锤头的结果表明依赖于锤击力度，力脉冲和力谱变化显著。注意到力谱衰减20dB对应的频带变化明显（重锤激励的频带更宽）。因此，如果使用这样的锤头进行锤击试验，每次锤击力度都不同，那么每次激励的力谱也会显著不同。这样对相干在高频率范围有明显的影

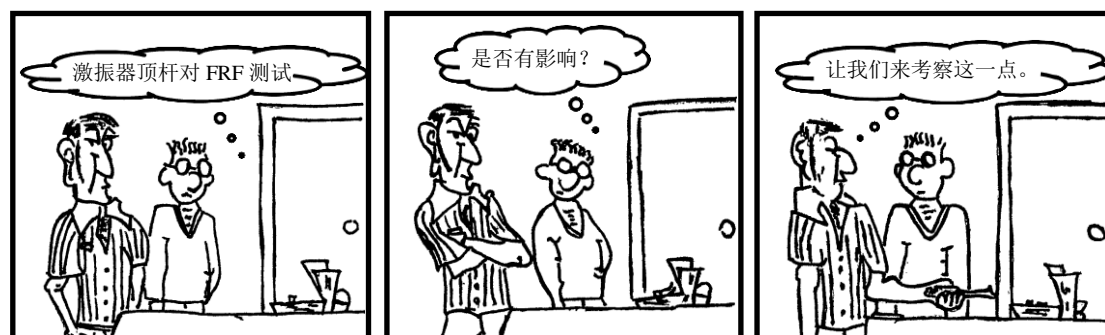
**硬塑料锤头前加装弹性帽**——这个锤头也展示了相同类型的变化。在这个特定的测试中，弹性帽略微比硬塑料锤头长，这样使得二者之间就有效地形成了一个小的空气袋。再次表明依赖于锤击力度，力谱/激励的频带显著不同。

**硬塑料锤头**——注意到这个锤头在激起的频率内，力谱变化相对较小。也存在一些相同的小变化，但相对于前两种锤头而言，这种情况下变化相对较小。因此，用这个锤头激起的频率范围相对稳定，即使应用了不同的锤击力度。

当激起的频率范围是测试的关键因素时，这个影响就很重要了。对于前两种锤头，激起的频率范围显著依赖于锤击力度。因此，对于每次平均、每次测试必须确保锤击力度相对一致。而这一点又不是一直都能轻易做到的。因此，使用这些特殊的锤头时必须小心。

我希望这些解释能帮助你明白锤击法试验必须非常小心。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





激振器顶杆对FRF测试是否有影响？

让我们来考察这一点。

当使用激振器进行测试时，需要关心激振器与待测结构的连接。很多时候，我看到使用激振器进行频响函数测试时，对这类激振器的使用都存在一些错误理解。人们对使用振动台进行设备可靠性测试很熟悉，振动台经常用来模拟一些实际载荷或者按照一些规范进行可靠性测试。但是，模态测试跟这类可靠性测试有些不同。

用激振器进行测试时，不是直接将待测结构与激振器动圈连接，而在结构与激振器之间放置一根细长的杆，称为顶杆或推力杆。顶杆的作用是对测试结构提供沿顶杆长度方向的轴向激励，而施加到结构上的横向刚度要求非常小。图1为典型的激振器测试设置。

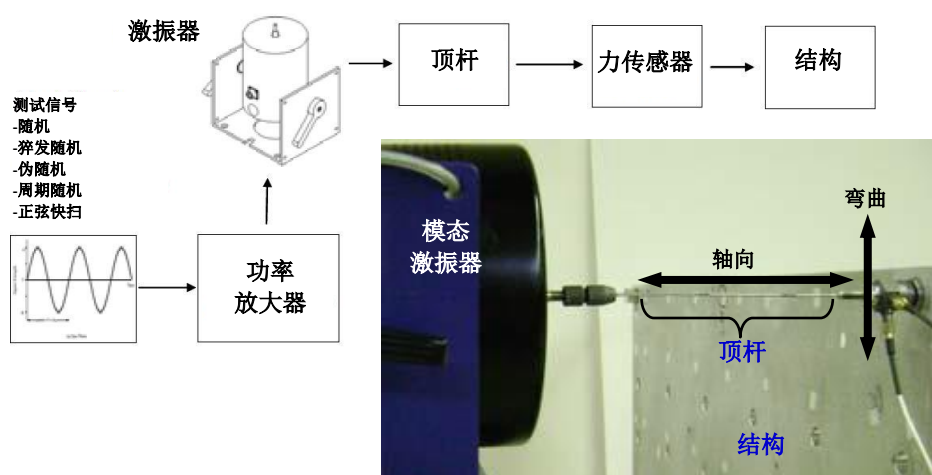


图1激振器模态测试典型设置

现在我要花一些时间去讨论可能存在的一些常见的情况，当然，受篇幅限制不可能讨论所有的情况。顶多，我可能只说明几种必须考虑的典型情况，以表明由于激振器和顶杆测试设置不合理导致频响函数测量失真。

**情形A：**考虑激振器顶杆的弯曲影响。我们记得顶杆的作用是只向待测结构提供沿顶杆长度方向的轴向激励，最小化任何横向的弯曲效应。当顶杆出现弯曲时，能导致出现两种现象。第一种情况，顶杆产生了转动载荷，而这个载荷力传感器是测量不到的。我们知道力传感器只能测量到沿顶杆轴向的拉压载荷，任何力矩都测量不到。当向结构传递力矩时，力传感器是无能为力的。另一种情况是顶杆向待测结构引入了转动刚度，而这个刚度却不是结构真实动力特性的一部分，是激励设备导致产生的。图2为激振器在不同高度激励一个简单结构的情形。显然，这对频响函数测量有影响。因此，在测试设置的初始阶段应该检查这一点。

**情形B：**考虑激振器顶杆与待测结构未对齐产生的影响。这个影响与之前的情况相似，在测量过程中顶杆引入了弯曲贡献。图3展示的测量结果失真由于激振器顶杆与待测结构未对齐导致产生的。因此，测试时必须保证激振器与待测结构垂直。

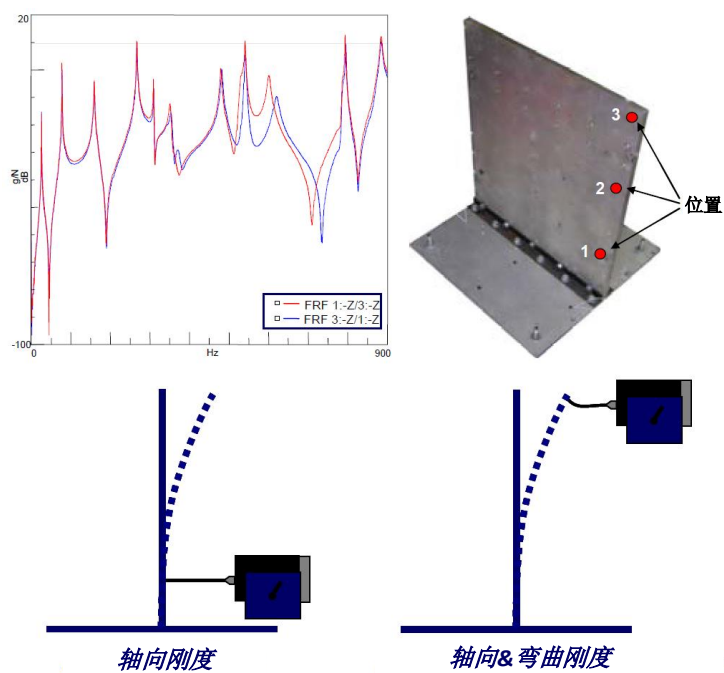


图2 顶杆的弯曲效应

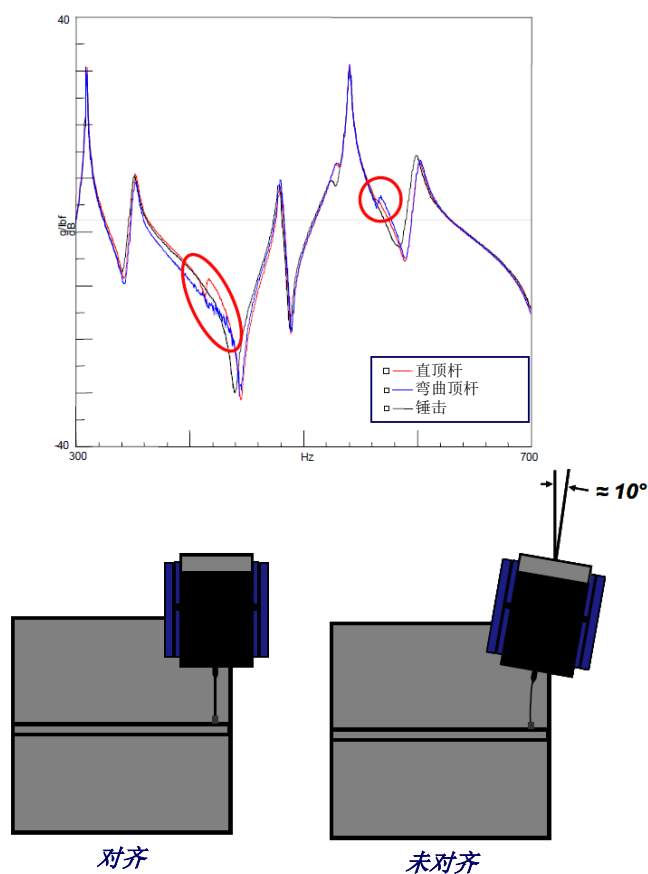


图3 顶杆的未对齐产生的影响

**情形C:** 另一个考虑事项是测试过程中使用不同长度的顶杆。图4的测量结果表明顶杆长度不同，得到的结果也不同。因此，必须进行预试验确定这个影响是否严重。

**情形D:** 最后考虑不同类型的顶杆对获得的测量也有影响。图5结果表明不同类型的顶

杆产生的影响。因此，应该在测试的起始阶段检查这一点。

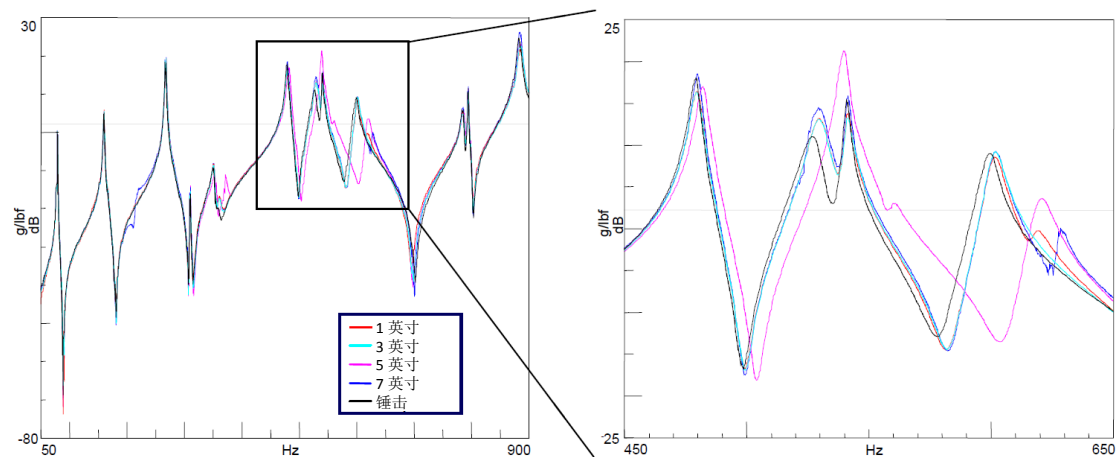


图4 顶杆长度的影响

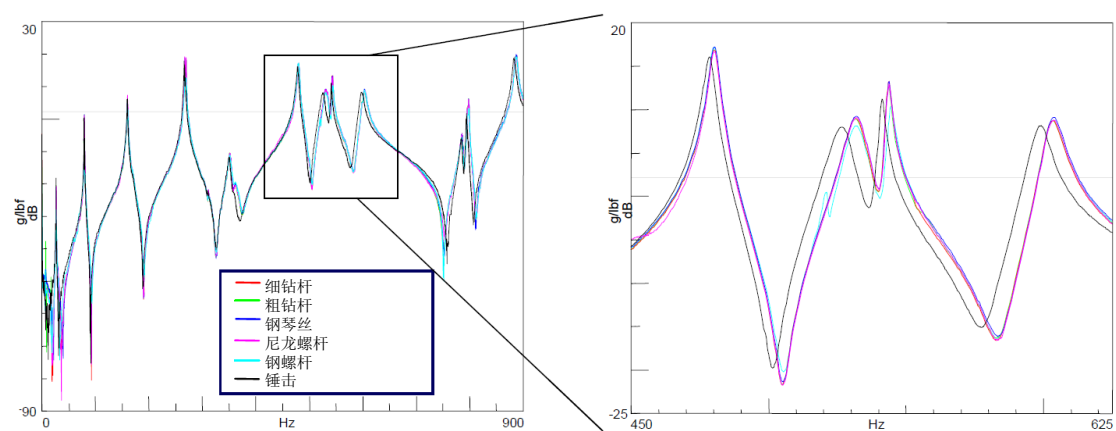


图5 不同类型顶杆的影响

从所有的情形可以看出，顶杆对测试结果有影响。无论是激励位置、斜对齐待测结构、顶杆长度还是不同类型的顶杆，顶杆都存在弯曲效应，这将影响频响函数的测量。

因此，激振器模态测试设置时必须小心。不幸的是，没有人能明确回答哪样的顶杆配置能提供最优的测量结果。这严重依赖于待测结构和感兴趣的频率范围。然而，你需要尝试各种情形，以确保你自己最终使用的顶杆配置，以便能得到最优的频响函数。

我希望这些解释能帮助你明白，在用激振器进行模态测试时必须十分小心，顶杆对总体结果有显著影响。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





我仍然不清楚单自由度在模态空间与物理响应的关系？

这需要进行一些讨论。

这个概念其实非常简单，但是需要进行一些解释说明以确保能全面合理地理解它。首先，让我们从基本方程入手，在之前的文章中曾多次描述过它。当然矩阵形式的运动方程是起点

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{F}(t)\}$$

这个耦合的方程组通过执行特征值求解解耦。由特征值求解得到模态向量组，由模态向量组得到模态转换方程。物理坐标  $\{\mathbf{x}\}$  通过模态向量  $[\mathbf{U}]$  与模态坐标  $\{\mathbf{p}\}$  发生关系

$$\{\mathbf{x}\} = [\mathbf{U}]\{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{u}_1\}p_1 + \{\mathbf{u}_2\}p_2 + \{\mathbf{u}_3\}p_3 + \dots$$

$$\text{而} [\mathbf{U}] = [\{\mathbf{u}_1\} \quad \{\mathbf{u}_2\} \quad \{\mathbf{u}_3\} \quad \dots]$$

将上式代入物理方程，左乘以模态向量  $[\mathbf{U}]$  的转置将转换到模态空间，得到一组非常简单的对角阵方程组，每个方程（模态振子）彼此正交，线性独立（解耦）

$$\begin{bmatrix} \bar{m}_1 & & \\ & \bar{m}_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{c}_1 & & \\ & \bar{c}_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & & \\ & \bar{k}_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}_1\}^T \{\mathbf{F}\} \\ \{\mathbf{u}_2\}^T \{\mathbf{F}\} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

对于这个方程，需要知道一些重要的东西。模态振型矩阵  $[\mathbf{U}]$  与这些东西密切相关。首先，每个方程只包含一个变量用于描述每个方程，对于特定某阶模态而言，这个变量就是模态位移。第二，每个方程与其他方程是解耦的。第三，每个方程本质上是一个非常简单的单自由度系统（SDOF）。第四，方程的右边确定从施加到物理系统上的多少外力作用到这个模态振子上。图1给出了一个多自由度系统（MDOF）的示意图，多自由度物理模型自由度之间存在耦合，同时给出了模态空间描述模态系统相应的等效单自由度系统组。

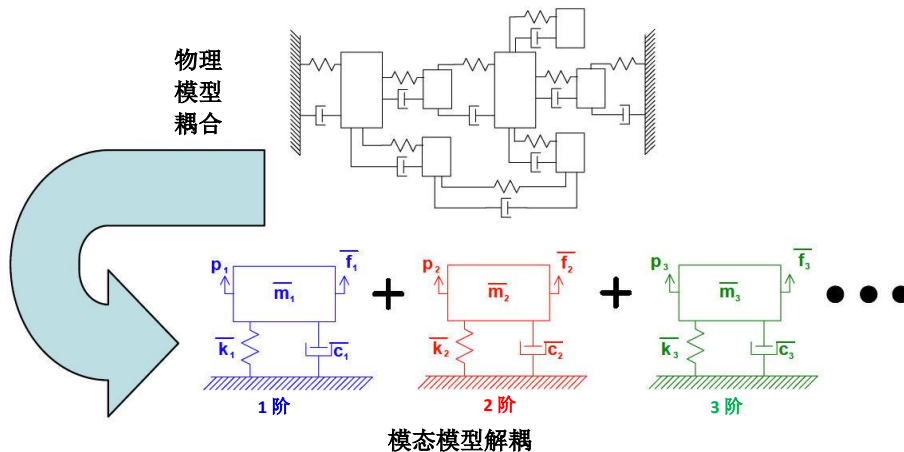


图1 多自由度系统和等效的单自由度系统



如果我写出其中任一模态空间的方程，使用下标“i”来表示第i个方程，我们将得到如下的方程

$$\bar{m}_i \ddot{p}_i + \bar{c}_i \dot{p}_i + \bar{k}_i p_i = \{u_i\}^T \{F\} = \bar{f}_i$$

因此，用这个简单的单自由度方程，我们可以计算出任何施加到这个等效系统上的力产生的响应。当然，我们也可以看出方程的右边确定从物理空间多大的外力通过模态振型作用到模态空间这个等效的模态系统上。使用这个力可以确定这个等效系统上产生的响应。这个响应的表过式可以在任何一本振动教材中找到，通常在教科书的前四章中的某一章，这四章介绍自由响应、强迫正弦响应或者随机输入响应。

出于讨论目的，我们假设对一个物理系统上某点施加一个锤击力。既然物理外力将分配到模态空间每个模态自由度上，如果我们考察第1阶模态，那么我们可以计算出描述第1阶模态的自由度的脉冲响应。这个单自由度的响应使用模态转换方程分布到所有物理自由度上。这个本质上是这个单自由度响应通过第一阶模态在每个自由度上的振型值缩放到所有的物理自由度上。这个过程示意如图2所示(这个图只给出了少数几个自由度用于说明这个概念)。这只给出了物理系统部分响应，这部分响应与第一阶模态移交到所有物理自由度上的贡献相关，图中与第一阶模态相关的响应用蓝色表示。

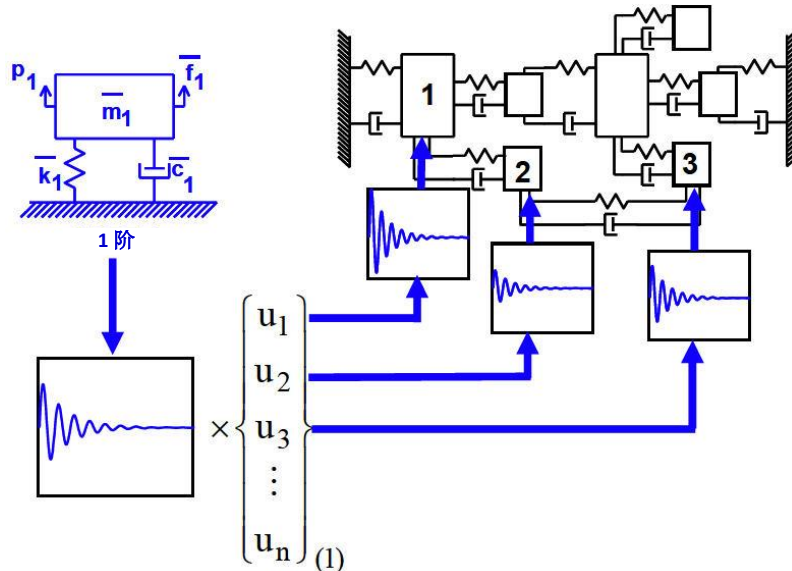


图 2 第一阶模态响应贡献示意图

这不是物理系统的全部响应，只是与第1阶模态相关的那部分响应。现在其他阶模态的贡献也需要包含进来。如果我们考察第2阶模态，那么我们也可以使用作用到第2阶模态的力计算出描述第2阶模态的自由度的脉冲响应。第2阶模态对应的单自由度的响应使用第2阶模态振型分布到所有物理自由度上。这只描述了与系统第2阶模态相关的响应。这个过程如图3所示(只给出了少数几个自由度用于说明这个概念)，与第2阶模态相关的响应用红色表示。

对所有模态都需要重复这个处理过程，从而计算出所有模态对物理系统总响应的贡献。当然，你不得不包含所有模态，因为这些模态对系统总响应都有贡献，不然的话，将会丢失一些模态。整个过程如图4所示。图4表明，物理方程和模态转换方程，使得耦合的物理系统可以等效成模态空间的单自由度系统组，在模态空间上用等效的模态力施加在所有的模态振子上。意识到每阶模态与其他阶模态都是线性独立的，但是总响应是所有参与系统响应的所有模态的线性组合。

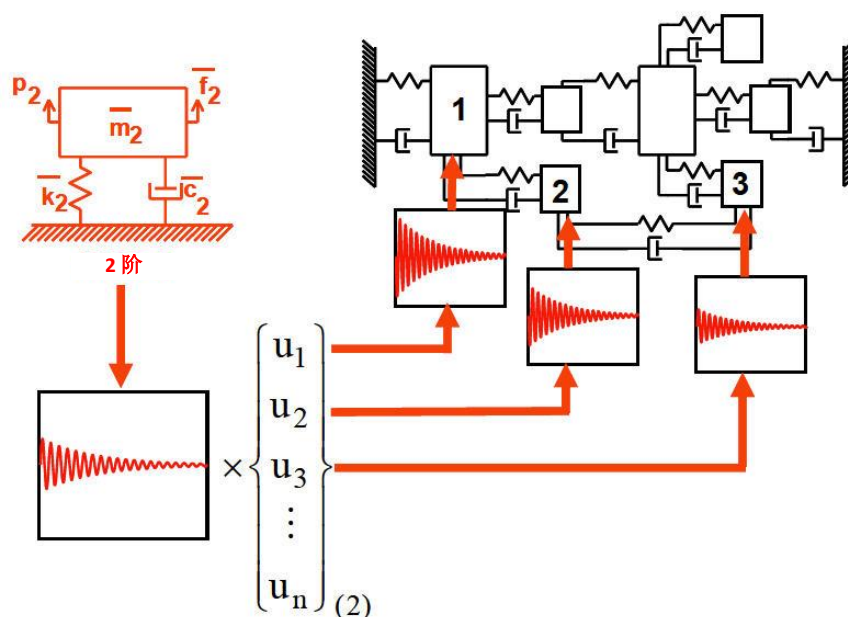


图 3 第二阶模态响应贡献示意图  
物理模型

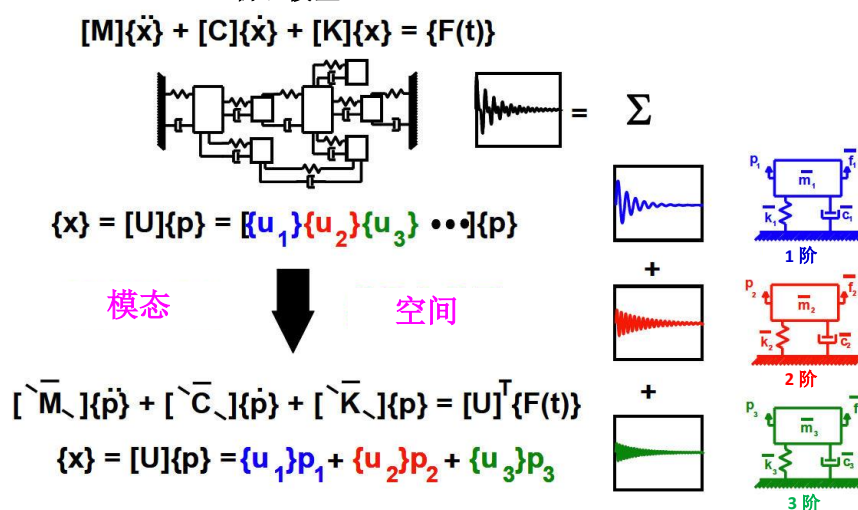


图4 模态空间描述总览

我希望这个解释能帮助你明白在物理空间表征的单自由度响应怎样形成模态空间的响应。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



我一直听说模态参与，到底是什么意思？

Ok，让我们来讨论这个。

人们一直谈论模态参与，但当他们谈论它时，可能对它到底是什么不是很清楚。因此，让我们来讨论这个概念，使人们更易于理解这个概念。

把模态参与放到特定的环境中，让我们写出运动方程

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{F}(\mathbf{t})\}$$

认识到由特征值求解得到模态转换，物理坐标  $\{\mathbf{x}\}$  通过模态向量  $[\mathbf{U}]$  与模态坐标  $\{\mathbf{p}\}$  发生关系

$$\{\mathbf{x}\} = [\mathbf{U}]\{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{u}_1\}p_1 + \{\mathbf{u}_2\}p_2 + \{\mathbf{u}_3\}p_3 + \dots$$

$$\text{而} [\mathbf{U}] = [\{\mathbf{u}_1\} \quad \{\mathbf{u}_2\} \quad \{\mathbf{u}_3\} \quad \dots]$$

进一步得到模态空间方程组

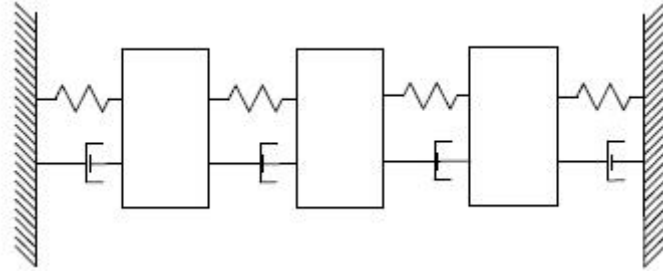
$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{m}}_1 & & \\ & \bar{\mathbf{m}}_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{p}}_1 \\ \ddot{\mathbf{p}}_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{c}}_1 & & \\ & \bar{\mathbf{c}}_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_1 \\ \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{k}}_1 & & \\ & \bar{\mathbf{k}}_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}_1\}^T \{\mathbf{F}\} \\ \{\mathbf{u}_2\}^T \{\mathbf{F}\} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

因此，最重要的是要理解方程右边，右边是模态振型的转置乘以施加到结构上的物理力向量。因此，如果你要考察某阶感兴趣的模态，那么，你将会看到模态振型值对多少外力分配到这阶模态有强烈的影响。

我的意思是如果模态振型值与某个自由度关联性很大，而在这个自由度上施加了外力，那么在模态空间上将为这阶模态分配大量的外力。另一方面，如果模态振型值在这阶模态上比较小，那么分配到这阶模态上的外力也很少。如果模态振型值为零，那么模态空间上将没有外力分配到这阶模态上。这意味着这阶模态对总响应没有贡献，因为在模态空间没有力施加到这个模态振子上。

模态转换方程确定怎样解耦所有耦合的物理方程组，也确定了模态空间上多少外力分配到每个模态振子上。分配到一个模态振子上的外力越大，响应越大（通常），那阶模态对系统总响应的贡献或者参考也越大。

让我们来看一个简单的3自由度系统和模态空间上的外力分配。模型和物理空间上的运动方程如图1所示。



$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_1 \\ \ddot{\mathbf{x}}_2 \\ \ddot{\mathbf{x}}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 & \\ -0.1 & 0.2 & -0.1 \\ & -0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2000 & -1000 & \\ -1000 & 2000 & -1000 \\ & -1000 & 2000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{Bmatrix}$$

图1 简单的3自由度模型和运动方程

这个运动方程的特征值求解得到频率和振型值如下

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} 5858 & & \\ & 20000 & \\ & & 34142 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}] = [\{\mathbf{u}_1\} \quad \{\mathbf{u}_2\} \quad \{\mathbf{u}_3\}] = \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.500 \\ 0.707 \\ 0.500 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 0.707 \\ 0 \\ -0.707 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} -0.500 \\ 0.707 \\ -0.500 \end{Bmatrix} \end{bmatrix}$$

现在，让我们考虑两个不同的力函数：

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

对于第一个力函数，只施加 $\mathbf{f}_1$ ，那么作用在第1阶模态上的力为 $0.5*\mathbf{f}_1$ ，作用在第2阶模态上的力为 $0.707*\mathbf{f}_1$ ，作用在第3阶模态上的力为 $-0.5*\mathbf{f}_1$ 。这样物理外力在每个模态振子上分配了不同的外力，这受与外力作用的自由度相关的模态振型值控制。

对于第二种情况，仅仅施加了 $\mathbf{f}_2$ ，作用在每个模态振子上的外力分别为 $0.707*\mathbf{f}_2$ ， $0.0*\mathbf{f}_2$ 和 $0.707*\mathbf{f}_2$ 。注意到第2阶模态没有外力，这是因为第2阶模态与力相关的自由度上的模态振型值为零。因此，我们可以说第2阶模态不参与系统响应，模态参与因子为零。但是这并不意味着这阶模态不存在，这只意味着这阶模态对这个特定载荷下的系统响应无贡献（但它对第一种载荷情况下的系统响应有贡献）。

让我给出一个小例子来说明这个问题更合适。假设你是一位饭店的厨师。你有许多种食谱，同时也有许多食材和调料可供每个食谱使用。我的问题是，你会在每个食谱中使用用量相同的所有调料吗？肯定不会。每个食谱中你会使用不同用量的调料，而一些调料你可能不会使用。我想说的是，你不会一直使用所有的调料。只有一些调料会以不同的用量“参与”每个食谱。

现在如果我正在做法国大餐，那么一些调料将会占主导，而如果是做日本菜，可能又会是另外一些调料占主导。但是我的调料盒里面一直都有所有的调料，可供我做不同类型的菜

看使用。但这并不意味着做菜时我会使用每一种调料，虽然他们都在调料盒里面。对于某一种特定的调料而言，它不会在每道菜中都出现（除非你做意大利菜，每个菜都要放蒜头！）。我想到这，你应该有所明白了。

另一个好的例子是管弦乐队演奏。演奏中会使用多种乐器，不太可能会一直使用所有的乐器来演奏每一个乐谱。事实上，来自每个乐器对一个特定的乐谱有着不同的贡献。有时喇叭占主导，有时弦乐器占主导。随着演奏会的进行，每种乐器都会不同程度地参与演奏，这依赖于乐谱内容。有时来自特定乐器的一些乐谱在整个演奏会中并不需要参与。但是管弦乐队总是由所有的管弦乐器组成，但所有的乐器对演奏的不同乐谱有着不同程度的参与，有时可能某种乐器在某时刻不需要进行弹奏。



任何结构系统的响应也是一样的道理，系统总响应由系统中可能存在的所有模态的线性叠加组成。并不是所有的模态都参与每种载荷下产生的系统响应。只有一些模态主要参与系统响应，而另一些模态对系统响应的贡献很小，还有一些模态不参与系统响应。所有模态参与的贡献量依赖于施加的载荷情况。因此，某阶模态有不同的模态参与依赖于施加的载荷。

要明白模态振型在决定物理系统外力分配到模态空间的模态振子上的多少起着重要的作用。因此，明白模态振型也帮助确定外力分配到系统所有模态上。

我希望这些解释能帮助你更好地理解模态参与。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



测试得到了一些预期之外的模态。难道整个测试设置有影响？  
这需要进行一些探讨。

一些情况中，测试设置对整个试验结果有显著的影响。你必须非常仔细对待这一点。从你跟我描述的状况来看，似乎在测试过程中，与测试设置相关的测试条件发生了变化，因此这对提取的模态有影响。

我猜想首先要做的是重新获得一些试验数据，而恰恰是这些数据使你相信存在的问题与进行的测试有关。当你一开始向我展示原始的稳态图时，你曾指出认为不会出现频率非常接近，几乎是重根的模态。稳态图如图1所示，在图中出现了非常接近的频率成分。

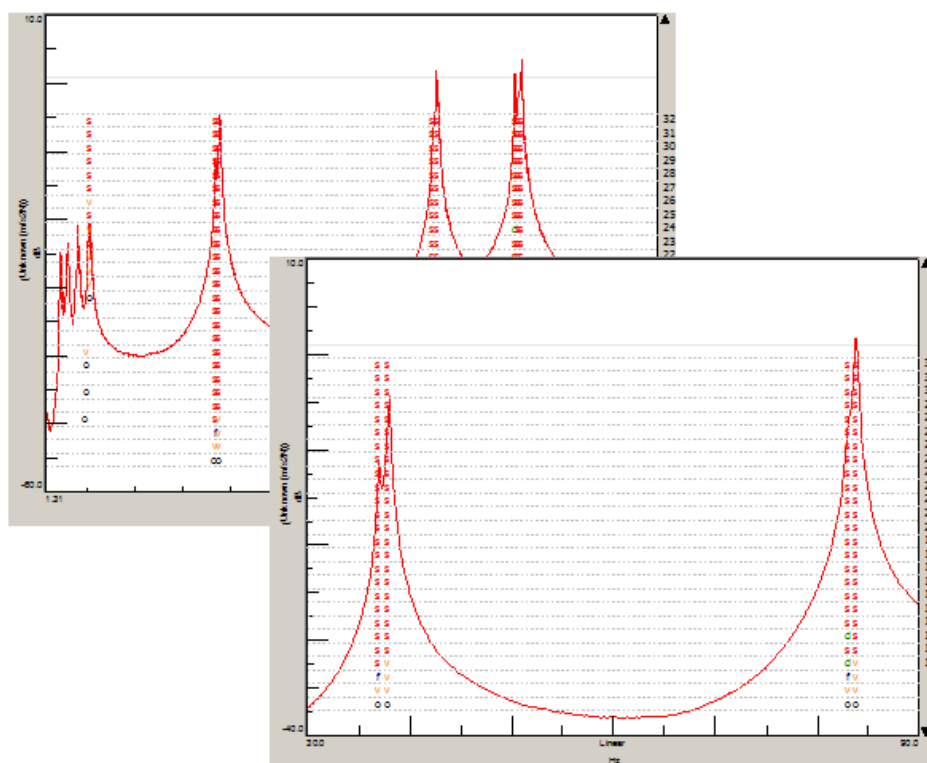


图1 频带超过130Hz的稳态图和30-90Hz内的稳态图

显然，在每个峰值处有多个根，但对于这个特定的部件结构，不应该会出现这些频率成分。因为我们讨论所用到的数据时，你提到这有多个参考加速度计，但是每个参考点的相关数据都是在不同的时间采集得到的，并不是同时采集的。

实际就是试验是分开做的，这样使得我相信两次试验中整个试验设置有变化。更仔细地考察稳态图，特别是在图1中的30-90Hz的频带内的确存在多个极点，在36.96Hz和37.96Hz有极点，二者相差3个频率分辨率，在83.08Hz和83.8Hz也有极点，二者相差2个频率分辨率。但问题是，它们真的是结构的模态还是测试设置有问题？



为了确定这个问题，我们可能需要更深入地考察数据采集的更多细节，清楚数据测试过程出了什么状况。首先要做的是分别考察从每个参考点采集到的数据。当我们单独考虑每个参考点时，我们发现每个参考点在以上频率处只有一个极点，每个参考点预测的频率值都不相同。这似乎表明从第一次测试到第二次测试，结构系统的所有模态发生了某种类型的移动。这一点可以从图2中显示的30-90Hz频带的稳态图中清楚看出。

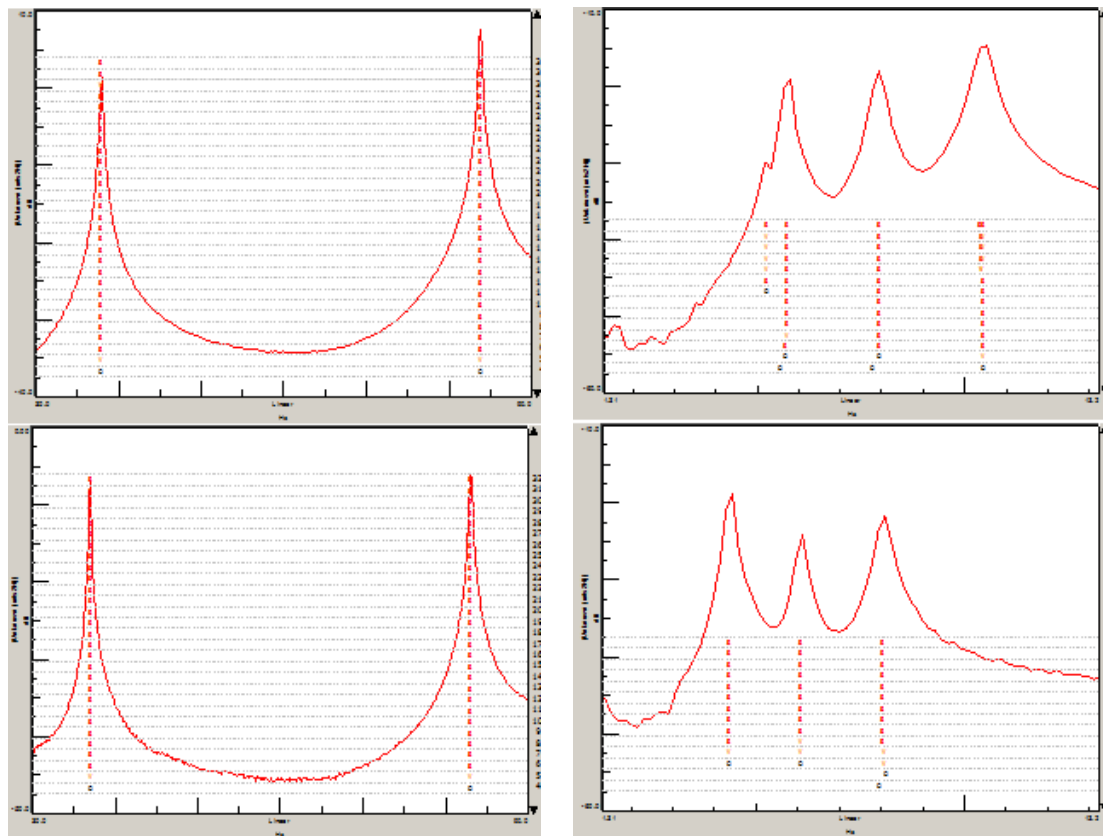


图2 单独考虑每个参考点的稳态图 图3 单独考虑每个参考点刚体频率范围的稳态图

为了进一步确认这一点，我们对结构的刚体模态频率进行评估。发现它们有着更明显的差异。当分别独立估算每个参考点时，清楚地发现结构的刚体模态移动或改变显著，如图3所示。

因此，两次测试下得到的刚体模态结果表明这些刚体频率变化剧烈。从一个参考点得到的刚体模态分别为4.3, 6.1和8.1Hz，而从另一个参考点得到的则为5.7, 7.9和10.4Hz，这表明由一次测试到另一次测试，这些频率发生显著移动。

在对测试设置进行一些检测工作之后，问题的原因可能是由于两次试验用到的结构支承系统的空气压力没有保持一致，导致两次试验的支承刚度发生了明显变化。我们把两次的测试数据重叠在一起比较时，就能突出显示这一点了，如图4所示。注意到蓝色FRF是一个参考点在某一天测试得到的，红色FRF是另一个参考点在另一天测试得到的。两组数据出现了明显的不一致，由于数据是不同日期测试得到，因而出现了显著的差异。

至此，原因已经很清楚了，是由于两次测试设置的不同导致的差异，不仅引起了刚体模态移动，还引起了弹性模态移动。而这些变化都是由于测试设置条件的轻微变化引起的。

当然，我们可能会争论哪一组是结构“真实的”频率，但我们真不知道哪一组是正确的，因为测试设置对观测到的频率有影响。更重要的是必须认识到要确保所有的数据都是按一致的方式采集得到的。最好是所有的数据都是使用多参考点锤击测试技术在相同的时间内采集的。这样可以防止因不同日期进行的两次不同试验出现数据不一致，避免因日期不同最终出

现两个本质不同的测试配置。

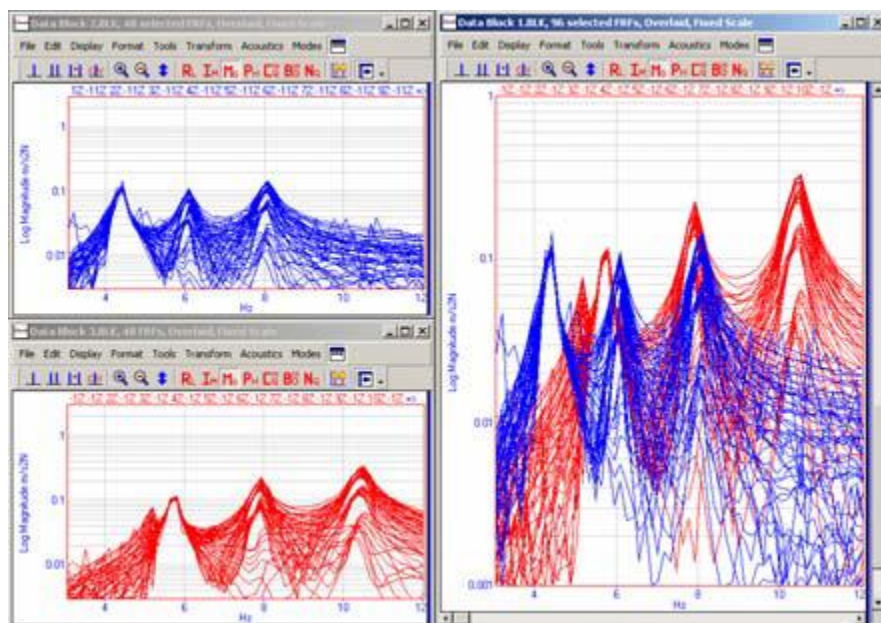


图4 比较两个参考点的FRF

我希望这些解释能帮助你明白采集数据时请按一种一致的方式完成。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



支承机理对FRF测量有影响吗？橡皮绳和鱼线悬挂会不同吗？  
视情况而定，让我们来讨论它。

前面我们讨论过测试设置的影响，但可能我们需要对这方面进行一些更深入的讨论。对于你的这个特定问题，我们有一些关心项与待测结构的支承方式是否对阻尼有影响有关。比如，用弹性绳或者鱼线悬挂支承是否有影响。为了弄清楚这有什么影响，让我们对一简单结构进行测试，以明白一些不同的支承机理对模态测试有何影响。

我们使用一块简单的平板进行测试，在一组测试中分别使用长弹性绳（橡皮筋）和尼龙线（鱼线）水平悬挂平板的四个角点。在第二组测试中，采用垂直悬挂，但只悬挂平板的两个角点，这样悬挂类似于摆钟。所有的测试情况，使用固定在平板上的一个加速度计测量平板的响应，使用力锤提供激励，测量结构的频响函数。

至于信号处理参数，要保证时域采样时间足够长，以便响应信号在采样结束前本质上衰减到零。这样就能保证FFT变换时不受泄漏的影响，不需要加窗函数。平板采用一些不同的支承方式如图1所示。作为参考，同时展示了力锤和加速度计。在这不是单独讨论每一情况的测试结果，而是讨论四次测试的所有结果。

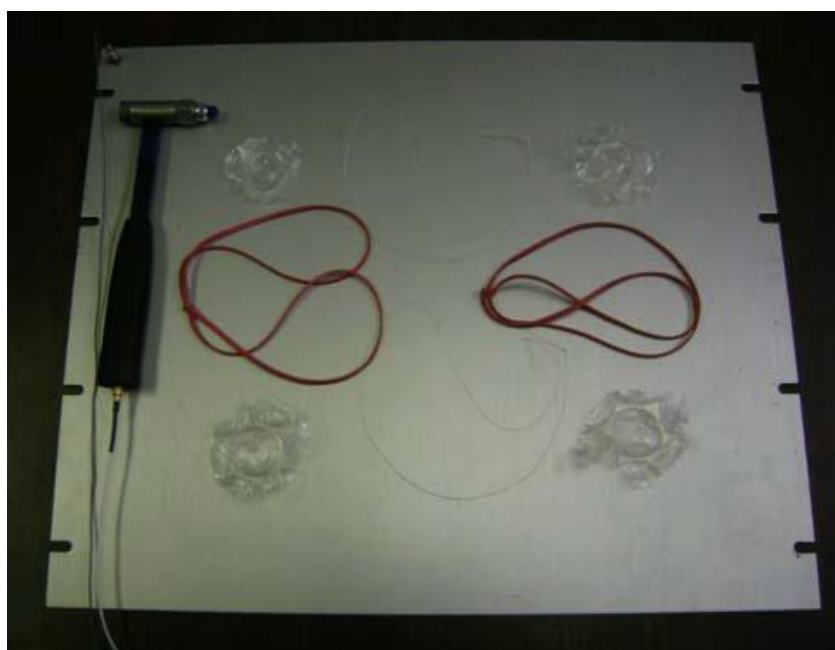


图1 带弹性绳和鱼线的平板（同时还有一些气泡包用于其他一些测试）

图2展示了四条频响函数的重叠图，还有用有理分式多项式曲线拟合方法（使用MEscope软件）得到的频率和阻尼结果。我们仅考虑前五阶模态。初看起来，这四种测试得到的频响函数明显有一些差异。

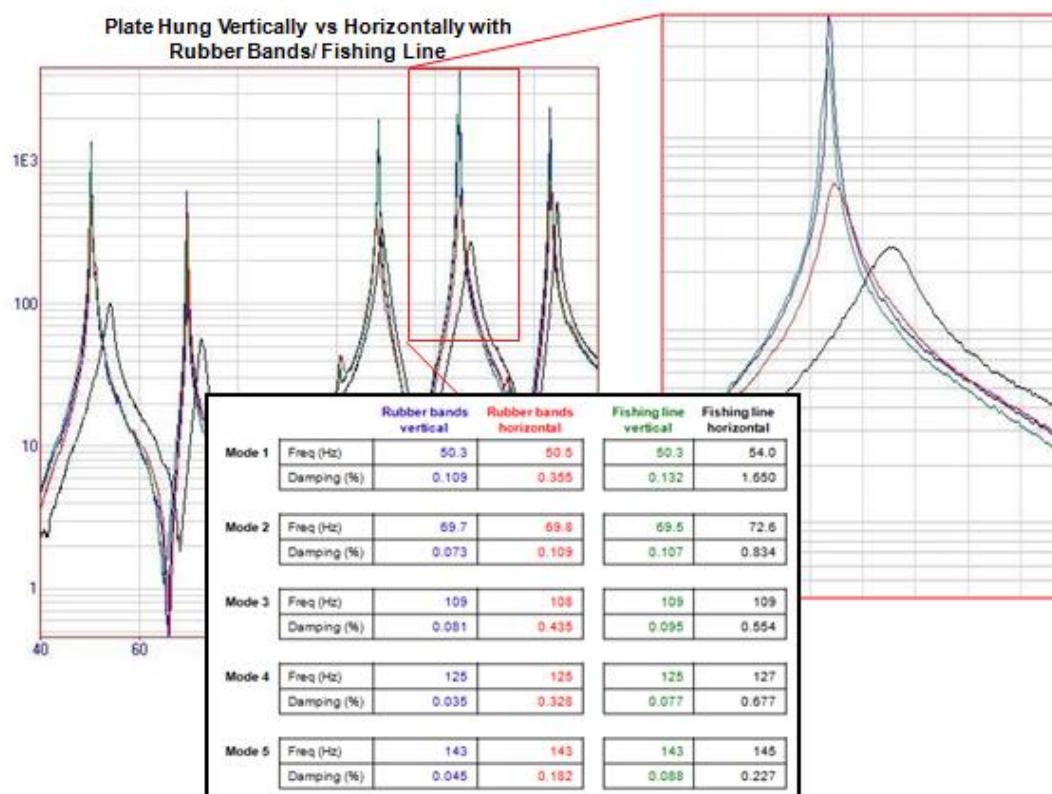


图2 四种情况下的FRF比较和由频响函数提取到的频率和阻尼

沿垂直方向（摆钟方式）悬挂平板的测试得到的频响函数差异不大。蓝色频响函数曲线是用弹性橡皮筋悬挂，绿色的频响函数曲线是用鱼线悬挂。这两次测试的频率值非常接近，阻尼值也接近，但还是有一些差异。对于沿垂直悬挂的两次测试，结果虽不完全相同，但是二者相差不大。

当平板沿水平方向悬挂时，结果存在明显的差异。对于弹性橡皮筋（红色），频率与之前的非常接近，但是阻尼值稍微有一些不同，似乎比垂直悬挂的值要大。考察用鱼线沿水平方向悬挂（黑色），可以看出考虑的前五阶的频率值明显增大，阻尼值也明显高于其他的情况。

从这些简单而快捷的测试中，就可以看出频响函数存在明确的差异，提取到的参数依赖于测试设置。

我希望这些解释有助于你明白理解测试设置对模态测试中感兴趣的一些关键参数有明显的影响。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





锤击测量中间需要暂停久些吗？指数窗能解决这个问题吗？  
这非常重要，让我们来讨论它。

让我们探讨一下，你所描述的测量产生的那类问题。你的测试对象是一个阻尼非常小的结构，为了避免泄漏，最可能需要应用指数窗。从你的描述来看，测量可能看起来如图 1 所示。

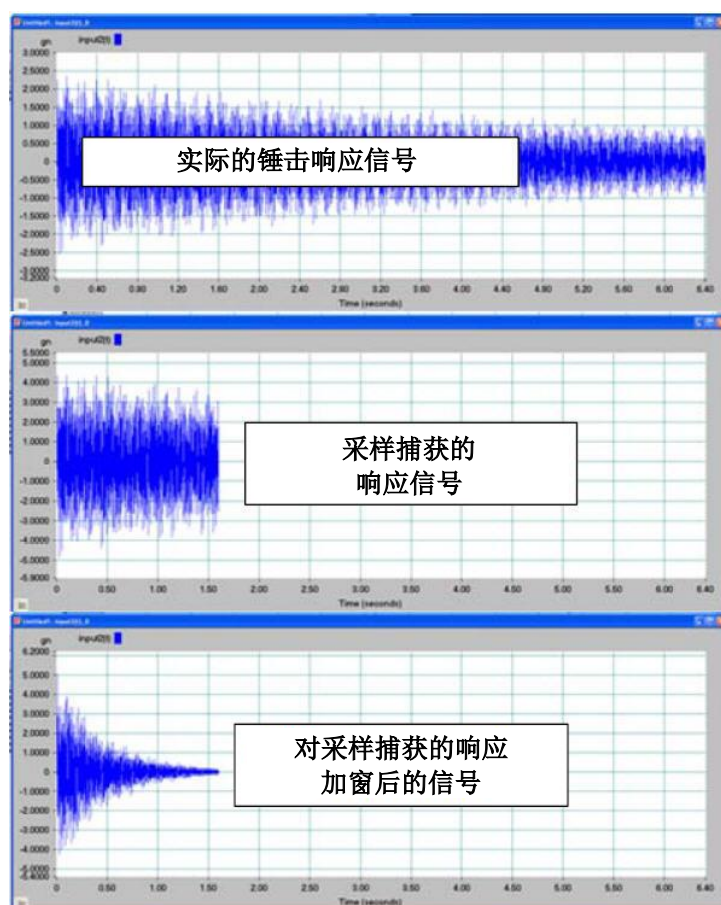


图 1 单次锤击响应样本

图 1 中最上面的波形表明时域响应衰减时间比你采集时间长，中间的波形是来自于 FFT 秒数的实际采样，底部是应用了指数窗的响应信号。然而，到目前为止，一切看起来都相当正常。从你描述的测量看来，通过锤击结构和测量响应进行一系列的平均。这些平均的采样如图 2 所示。就你关心的而言，对信号应用窗函数，测量响应，然后进行平均，得到了你描述的测量数据。

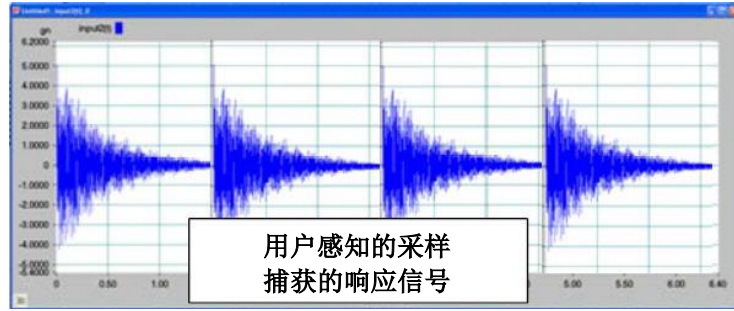


图2 用户感知的锤击平均的响应

然而，图3展示的FRF和相干都不尽如意。另外，驱动点的FRF缺乏典型的测量特征，典型的测量特征应该是共振频率和反共振频率明显。

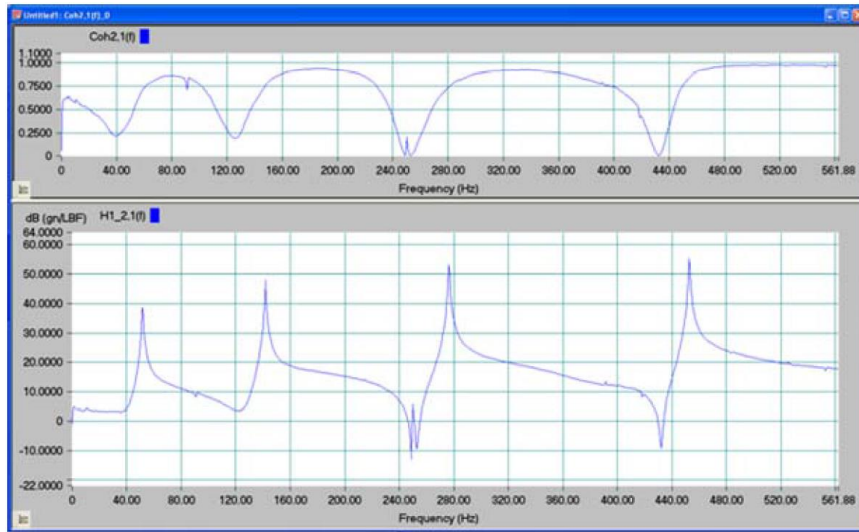


图3 初次测量的FRF和相干

可能什么地方出错了呢。为了明白发生了什么，我们需要回顾一下系统传递函数。当我们写出运动方程，并执行拉普拉斯变换后，得到

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = f(s) + (ms + c)x_0 + m\dot{x}_0$$

进一步得到系统传递函数形如

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

我们必须意识到方程右边我们忽略了一些项，忽略的这些项是变换时系统的初始条件。

而忽略这些项是假设初始条件为零，但问题是进行的初次测量时，锤击间歇之间假设结构的响应为零。对测量应用了指数窗，看起来响应是衰减到零了，但这样衰减到零只是与数据采集的软件相关，结构实际响应还没有衰减到零。

实际上，最可能的情况是进行的测量是按紧密连续的方式进行的，在下次采样发生之前结构实际的响应还没衰减到零。这个示意如图4所示。因此，实际情况是第二次平均的响应包含了第一次锤击之后剩余的响应，而第三次平均是包含了第二次或前两次锤击的剩余响应，这个过程持续进行，直到完成所有的平均。因此，本质上每次平均测量的响应（第一次之后）不止是本次锤击引起的结构响应，还包含之前锤击引起的结构剩余响应。这就是相干如此之差的原因。



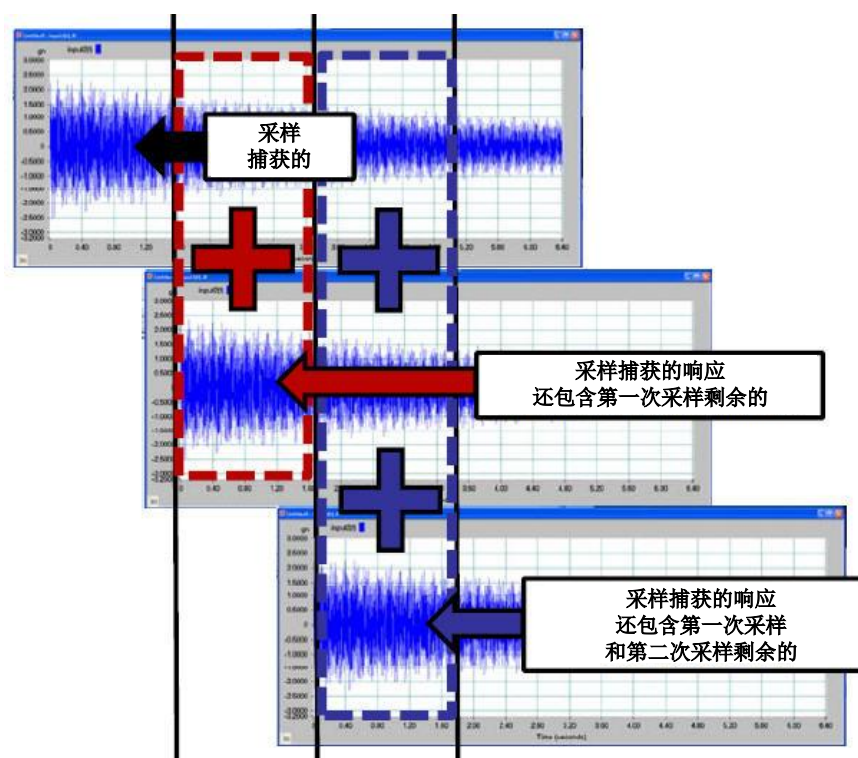


图4 从结构角度考虑的锤击响应

为了确定情况就是这样，进行另一次测量，这次给出足够的采样时间，以便结构回到稳定状态（响应为零，也就是每次锤击的初始条件都为零）。这次测量得到的 FRF 和相干如图 5 所示，很明显这次测量的质量远优于图 3 所示的测量。

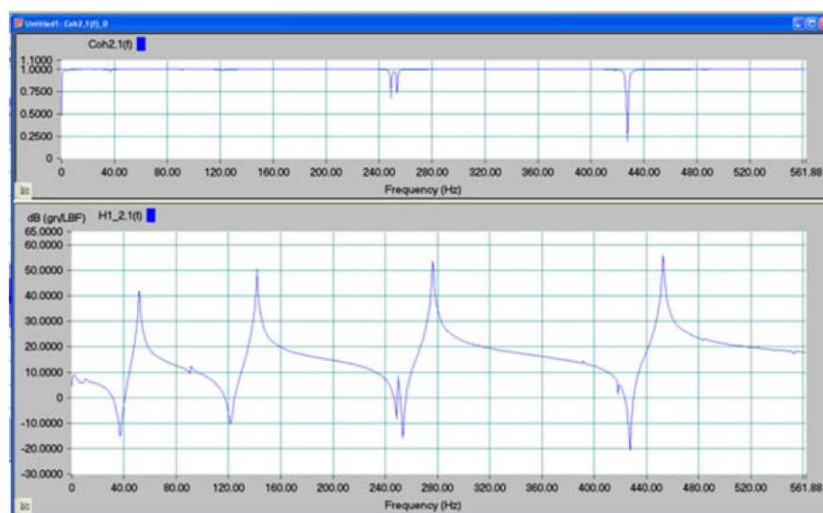


图5 合适技术得到高质量的 FRF 和相干

我希望这些解释能帮助你明白形成 FRF 易受系统传递函数公式中的一些假设条件的影响，也就是初始条件假设为零。一旦遵循这样的限制条件，高质量的测量就能获得。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



为什么不用大推力激振器进行模态测试，而只需“调大信号”即可呢？这不是个好主意，让我们来讨论它。

我们需要讨论几个事情。很多时候，热衷于模态测试的人们有时的测试来自于“振动鉴定世界”（产品可靠性试验），而这类试验完全不同于传统的“模态世界”。

在产品可靠性测试中，需要使用大型的振动台，测试对象通常硬连接在振动台动圈的扩展台面上，然后施加一些基本的激振信号，通过控制一些预定的加速度监控试验的进行。待测设备（DUT）通常会经受一些工作环境条件，一般性频谱或者一些极度的环境条件，以确定设备是否适合特定的用途。这类典型的测试示意如图 1 所示，图中给出了振动台系统和一个测试对象，这个测试对象安装在夹具和扩展台面上，而这些部件又位于振动台的动圈上。

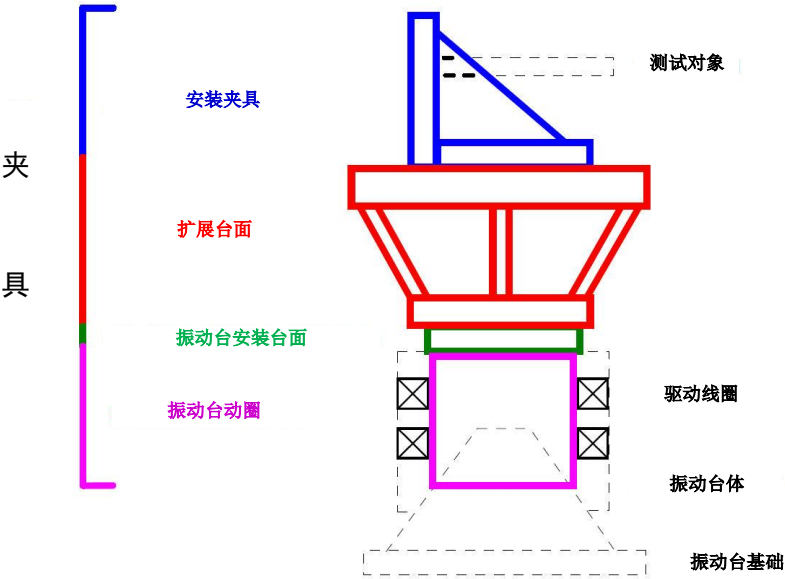
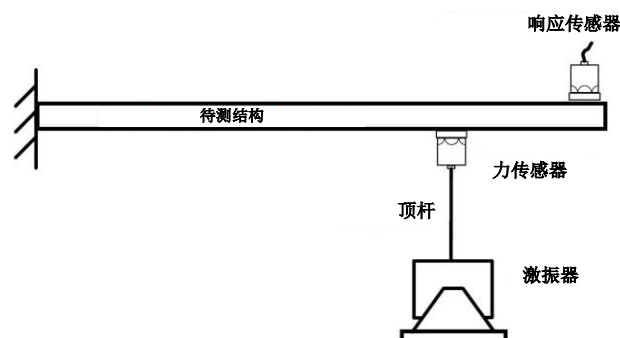


图 1 典型的振动台可靠性试验设置

这类试验完全不同于我们的模态试验。模态试验中，激振器通过长杆与结构连接，此长杆称为推力杆或者顶杆。使用安装在结构上的力传感器或者阻抗头测量激励结构的激励力大小，如图 2 所示。

模态测试的目的是使用较低量级的激励确定系统特征，模态测试不提供工作状态的激励量级作为激励输入。事实上，如果使用的激励量级越大，那么有时会激起结构的非线性，导致整体测量失真，因而对模态参数估计而言，大量级激励不是特别有用。

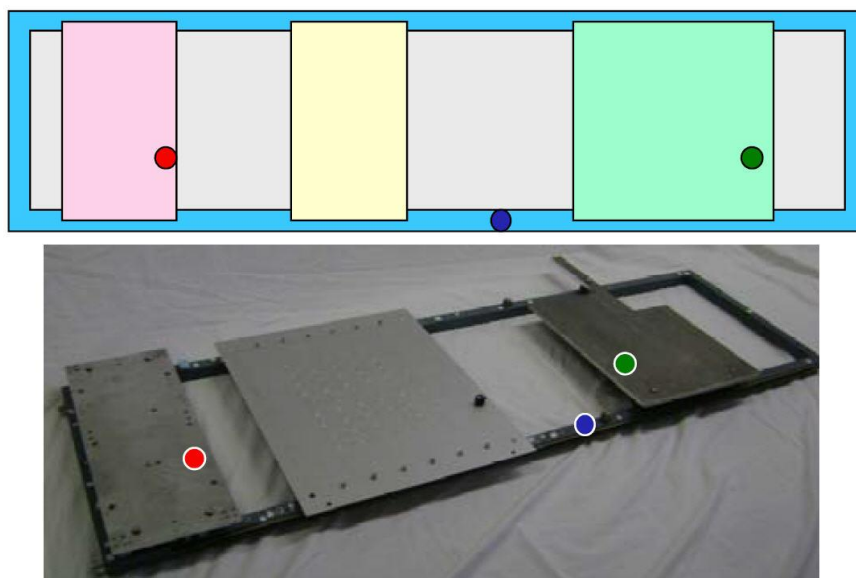
当然，这也依赖于待测结构的类别。如果结构是大型系统的一个简单部件，而这个部件本身是一个相当线性的结构，那么使用激励量级合适的单个激振器进行测试没有问题。



但是当结构是一个相当复杂的结构，由许许多多部件组装而成时，那么，使用一个激励力激励结构，测量结构上的所有位置的响应确定模态振型就变得非常困难。当各个部件使用安装设备安装在一起，而安装设备的作用是用以彼此之间隔振时，试验就会变得更复杂。此时，问题是从一个激振器激励位置很难提供足够的激励能量使得所有响应点的 FRF 测量都是高质量的。那么，“调大信号”变得很有必要，以便能够使所有响应位置都有可测量的振动量级。一旦这样实施了，那么很可能将激起结构非线性，从而降低整体测量质量。

我涉及到过许多这种情况的测试。刚好近期测试过一个大型推进系统，这个系统有一套隔振系统，用以隔离所有部件之间的振动传递。实际的测量数据不能展示，在这给出一个实验结构。这个实验结构由几个部件通过一个隔振系统连接在一起，仅仅使用一个激振器激励这个系统用以说明这个问题。

实验结构如图 3 所示，3 个平板部件通过几个隔振器安装在一个大型框架结构上。一个激振器对主框架进行激励，得到 FRF 测量。另外，使用 3 个激振器进行 MIMO 测试，用于比较测量。图 4 展示了典型的驱动点 FRF 测量（主框架上的测点）。红色 FRF 为单个激振的 SISO 测试，位置相同的黑色 FRF 为 3 个激振器的 MIMO 测试，3 个激振器应用了非常低的激励量级。



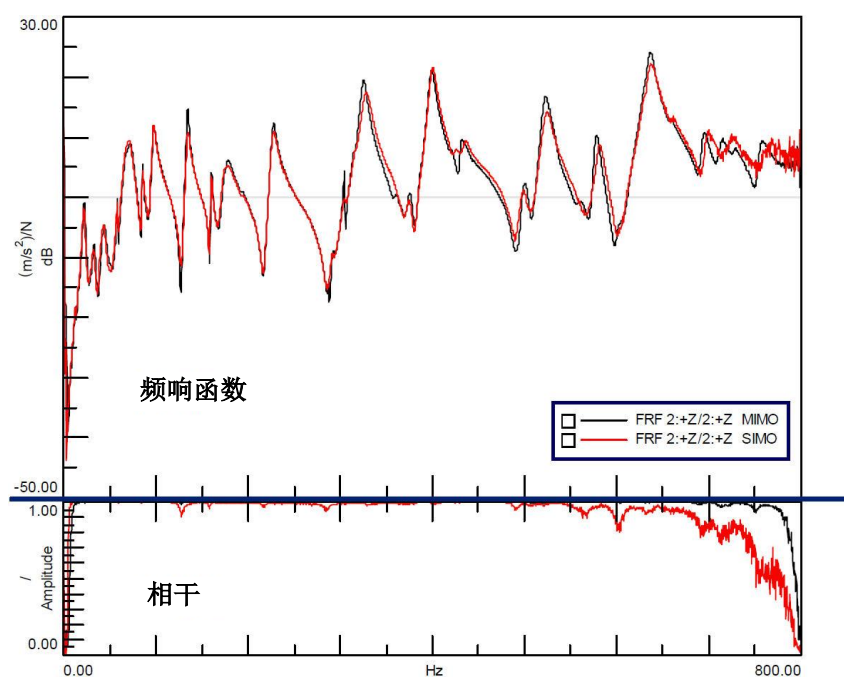


图4 驱动点 FRF 对比: SISO vs MIMO

观察图4的FRF, 显然SISO的FRF质量不同于与由低激励量级的MIMO的FRF, 这一点在相干中表现特别突出。跨点的FRF测量质量更差, 如图5所示, 此时发现SISO的FRF和相干更糟糕。

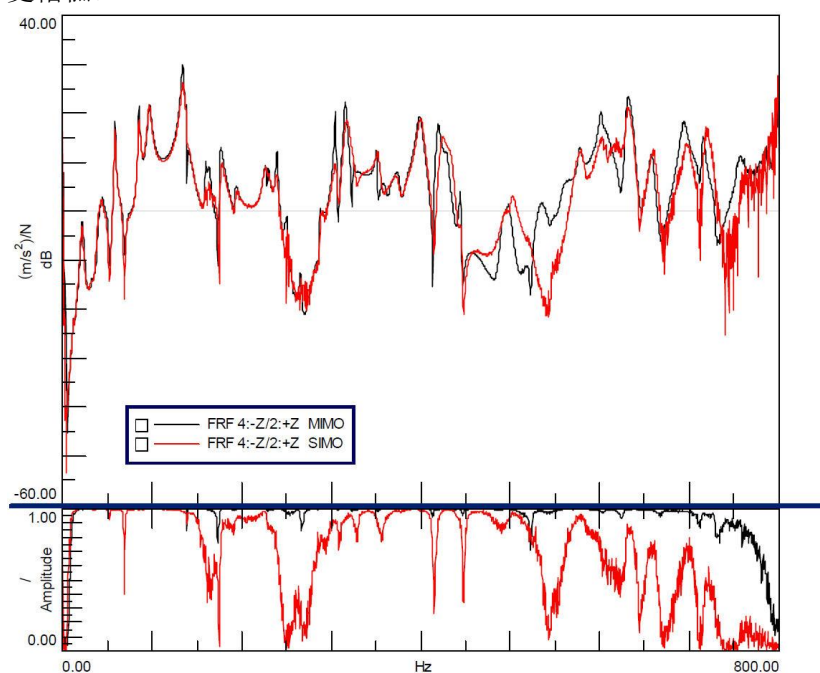


图5 跨点 FRF 对比: SISO vs MIMO

这只是一个简短的讨论, 在下一篇文章中将扩展这个, 进一步说明使用一个大推力激振器测试不优先于使用多个低激励量级的激振器进行测试。

我希望这些解释能帮助你明白理解使用一个激振器在“调大激励信号”时将不能提供高质量的整体测量。如果你还有模态分析其他问题, 请咨询我。





MIMO 和 SISO 模态测试真的有差异吗?

当然有, 让我们来讨论这个。

我听到这个问题已经很多次了。我猜想主要是由于 MIMO 测试需要购买额外的硬件和软件。实际应该调整思想观念, 因为 MIMO 真的优于 SISO。

上一篇我们讨论了使用一个大推力激振器“调大激励信号”可能会激起结构的非线性, 因而整体 FRF 可能会受到非线性的影响。从那次的测试数据上看, 显然单个激振器测试不能为模态参数估计提供最优的 FRF 数据组。

我经常看到人们使用另一方法进行模态测试。使用一个激振器, 通过移动激振器到不同位置获得多参考点数据。表面看来, 这是一个可行的解决方案, 但是这个方法有一定的局限性。第一个问题, 我们之前已经讨论过, 那就是为了使结构上所有测点的响应都足够, 那么激振器的激励力量级将要求更大。

单个激振器可用于不太复杂的结构。复杂结构由多个部件和子结构组成, 而这些部件和子结构之间连接方式要求能量传递最小。当部件彼此之间隔振时, 情况更为复杂。这些情况中, 只使用一个激振器进行激励很难使结构上所有测点都具有足够的响应。这些情况, 需要使用多参考点方法。

因此, 让我们来讨论, 为了采集多参考点的 FRF 数据, 使用单个激振器在不同参考点之间移动的困难之处。然而, 不幸的是, 我发现这种方式获得的许多测试数据都是不可用的。反而, 一个简单的结构通常用作复杂结构的组部或子系统, 部件或子系统安装时要求能量传递最小(隔振)。

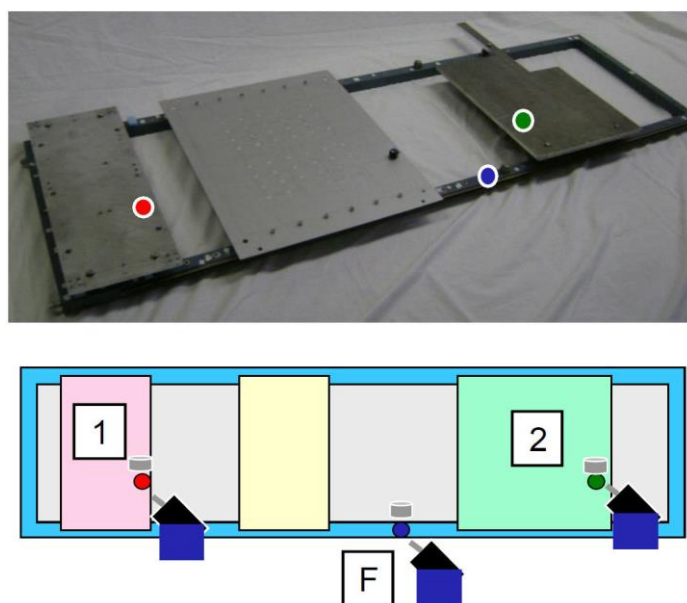


图1 带隔振组件的实验结构

实验结构如图 1 所示。这个结构由 3 个部件装配在一个框架上, 3 个部件分别通过一个非常软、中等硬度和非常硬的悬置连接。现在这个主框架和附件有一些典型的“厌烦的”卡嗒卡嗒声 (“pesky” rattles) 噪声, 这类噪声折磨着 FRF 数据采集。不要试图最小化这些噪声源, 实际上他们适合于解释这些典型的结构测量。

对这个结构进行了许多不同的测试, 但在这只描述少数几组数据, 用以说明用单个激振器和多个激振器采集 FRF 的问题。3 个激振器参考点位置如图 1 所示。

每个激振器单独测试采集 SISO 的 FRF, 3 个激振器同时测试获得 MIMO 的 FRF。然而, 为了获得可能的最优测量, 每个 SISO 激振器需要更大的激励量级以便获得合适的 FRF 测量, 而 MIMO 激振器只需要较低激励量级便可获得可接受的 FRF 测量。

为了对比所有的测量, 比较一些 FRF。所有的 FRF 中, 始终使用主框架上那个参考点的测量, 其他参考点的测量也可以用, 本质上产生的结果与下面描述的相同。在图 2, 3 和 4 中, 红色的 FRF 由 SISO 得到, 黑色的 FRF 由 MIMO 得到。两个 FRF 是由主框架参考点到部件的测量, 另一个是主框架自身的驱动点测量。

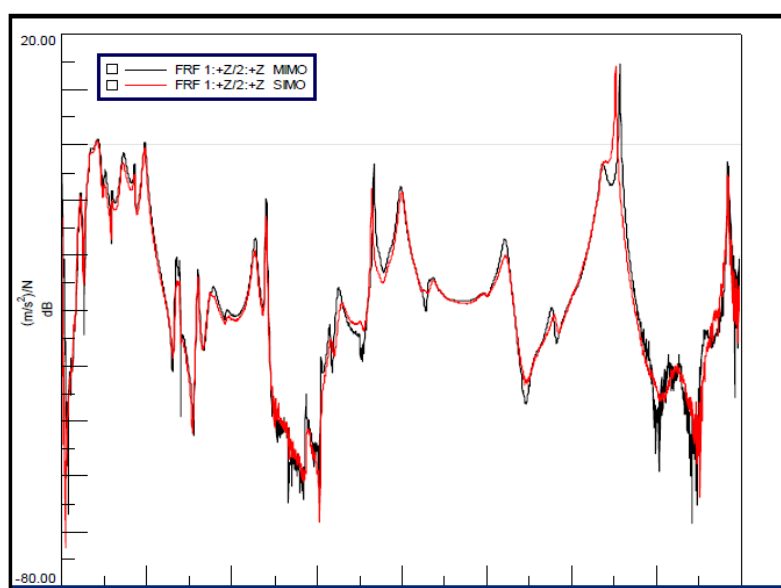


图 2 部件(1)到框架(F)参考点的 FRF

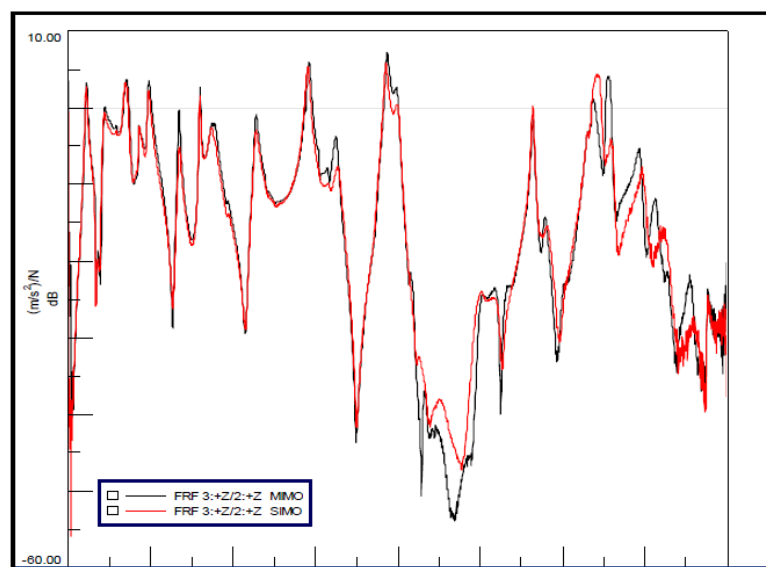


图 3 部件(2)到框架(F)参考点的 FRF



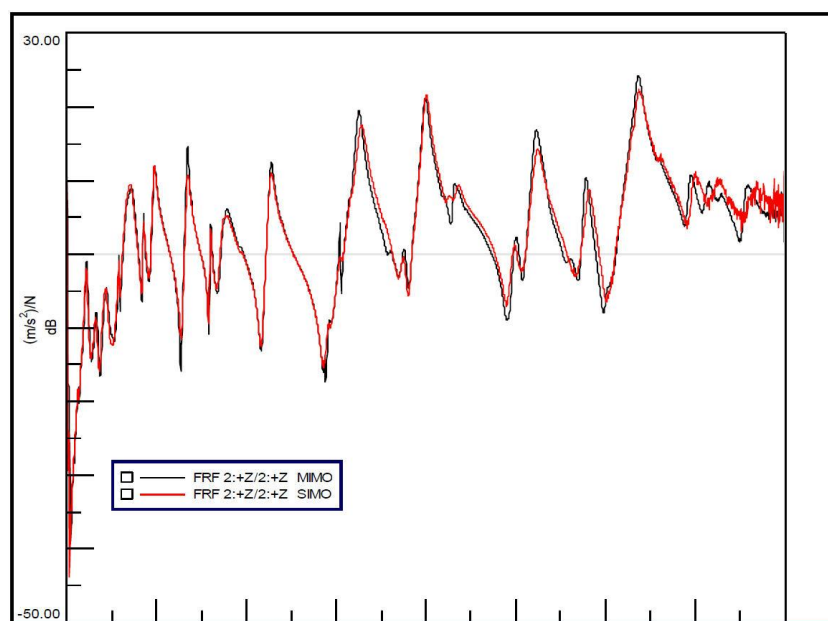


图 4 框架(F)到框架(F)参考点的 FRF

初看起来，图 2, 3 和 4 的数据没有非常大的差异，我知道许多人可能都会说数据不错。但如果你拉开细看一些互易的 FRF，就会明显发现，SISO 测试的 FRF 峰值与其他 SISO 都不重叠。这将引起不同数据组之间数据不一致。图 5 给出了一些不同的峰值。

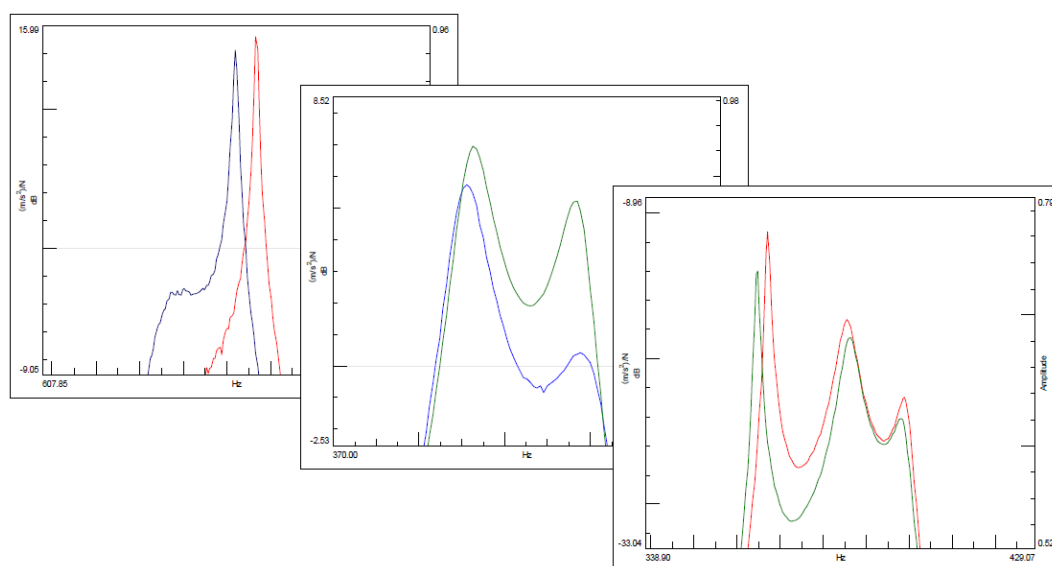


图 5 细看一些 FRF 展示数据的不一致性

基本事实就是不同数据组之间互易性不满足，这对模态参数提取有很大的影响（下一篇文章将讨论）。我希望这些解释能帮助你明白使用一个激振器在不同位置之间移动不能提供最佳的数据测量。为了从多参考点位移提供更一致的 FRF 数据，MIMO 测量是需要的。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



模态参数识别使用多参考点和单参考点真的有区别吗？

让我们通过一些数据来讨论它吧。

从纯理论角度来说，你可以从任何参考点提取到模态参数，只要参考点不位于模态节点上。但是，这仅仅理论，对任何真实结构进行测试，我们需要考虑一些现实因素。

在之前的两篇文章中，一些测量方面已经讨论过。总的说来，使用 MIMO 测试同时采集数据获得 FRF 总是质量更高。如果使用单个激振器测试会出现两个问题，对于模态参数估计来说，这种方式获得的 FRF 质量不是最佳。

一方面，单个激振器激励需要更高的激励量级才能得到足够的测量，但这总是会激起结构非线性，通常会增大频率变化，并且 FRF 测量也不如预期。另一方面，当多参考点数据是来自单参考点测试时，通常这些 FRF 不是按一致的方式获得的，这样会导致共振峰频率轻微变动。虽然这个结构可能是时不变系统，但当测试是分开进行时，测试设置对 FRF 测量有影响。另一个变化是，由于数据是不同时段采集的，可能环境存在轻微的变化，这样会复杂化这个问题。

为了与之前的两篇文章保持连续性，在还使用之前同样的数据用于讨论。当然，我们要注意到一些模态的频率有一些移动，并且所有用于形成多参考点数据的 SISO 数据都不满足互易性。

实验结构的示意图如图 1 所示。在三次不同的测试中采集了三个参考点的 SISO 数据，还有使用 MIMO 同时采集三个参考点的数据。

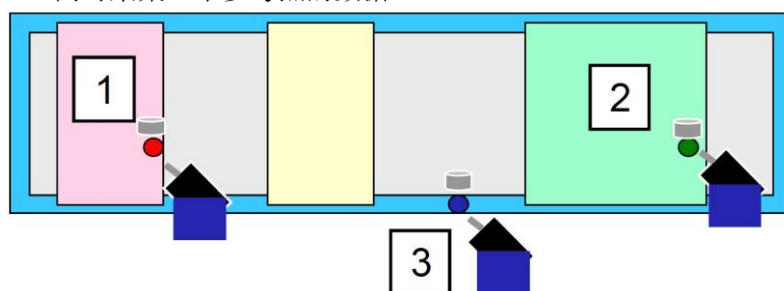


图 1 带隔振组件的实验结构

之前的文章已经讨论了一些测量问题。在这我想处理一些数据用于表明模态参数识别中存在的一些困难。所有的情况都将使用稳态图，以表明一些变化的数据在确定系统极点时所面临的挑战。

首先要做的是，使用三个 SISO 测试获得的 FRF 形成一个多参考点数据，以用于进一步处理。（注意，我不称它为 MIMO 数据，是因为所有的数据都是单独采集的。）模态参数估计第一步是确定系统极点。通常使用带有模态指示函数的稳态图确定极点。在这确定极点，所有的情况将使用 CMIF 函数。

图 2 展示这种情况的稳态图。虽然对于多数人而言，这个稳态图可能是可接受的，但是系统极点明确存在一些变动，对于确定每一个系统极点而言，极点还不是非常稳定。（我们

再次处理这些数据，稳态图将会得到改善。)

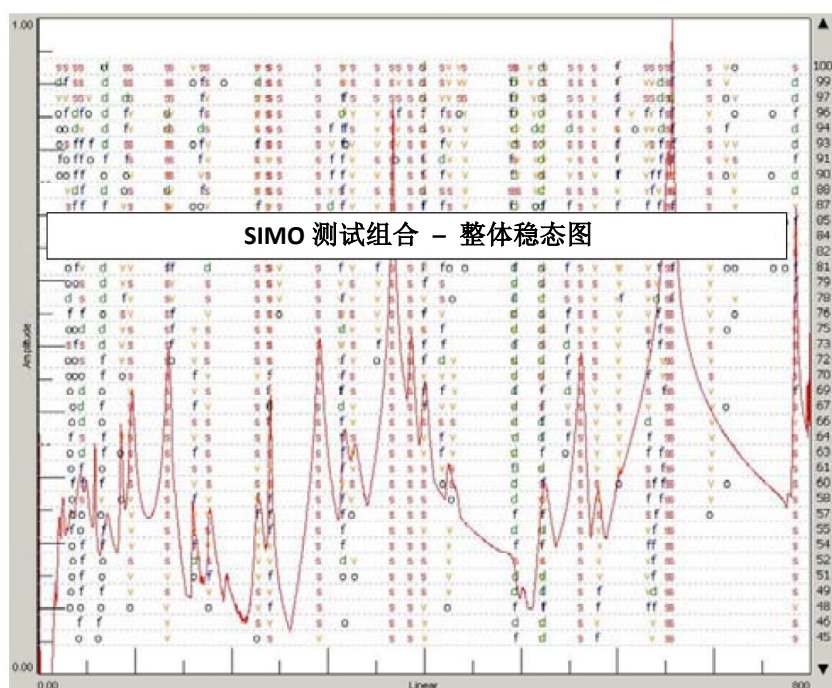


图 2 SISO 的 FRF 组合数据的的稳态图

在考察 MIMO 数据之前，让我们分别考察一下单个 SISO 数据。图 3 给出了分别对三个 SISO 数据进行处理分析的结果。非常明显，每个参考点稳态图中的系统极点稳定性非常一致。当数据看起来这样好时，确定系统极点一点问题也没有。

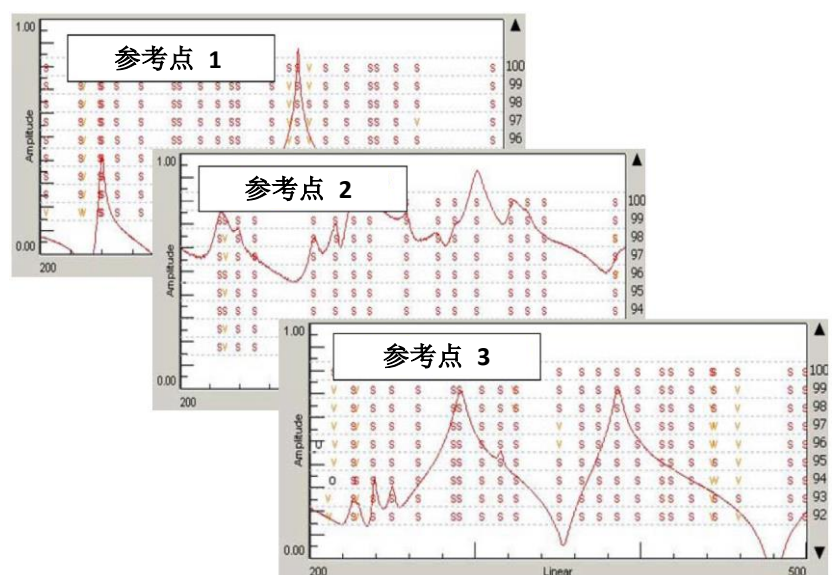


图 3 三个 SISO 数据各自的稳态图

为什么单个 SISO 数据的稳态图（图 3）中系统极点如此明显，而这三个数据联合形成的多参考点数据（图 2）极点却不那么明显？要知道，每个 SISO 数据都是同时独立采集的。即使先前两篇文章中讨论到这些数据有噪声和非线性，但是用这些数据确定系统极点一点困难也没有。但是，当使用 3 个 SISO 组合成一个多参考点数据时，并不能保证三个不同的 SISO 数据之间一致相关。实际上，之前的文章就已指出 FRF 峰值有移动。在一些 FRF，如互易的 FRF 中，注意这些峰值有移动。最主要的原因是数据采集是在三次独立的测试中采完成的，因而未必能保证数据一致相关。这就是为什么稳态图中的极点不那么一致稳定的原因，

当这种情况出现时，系统极点确定也就不那么直观了。

为了确认这一点，将使用 MIMO 数据（所有的数据都是按一致方式同时采集的）产生稳态图，如图 4 所示。这个稳态图明显优于图 2。当然，这有一些频率仍然不完美，但相较于三个独立的 SISO 数据组合形成多参考点的情况，这些频率已有改善，而分开采集 SISO 数据，不能保证数据一致。

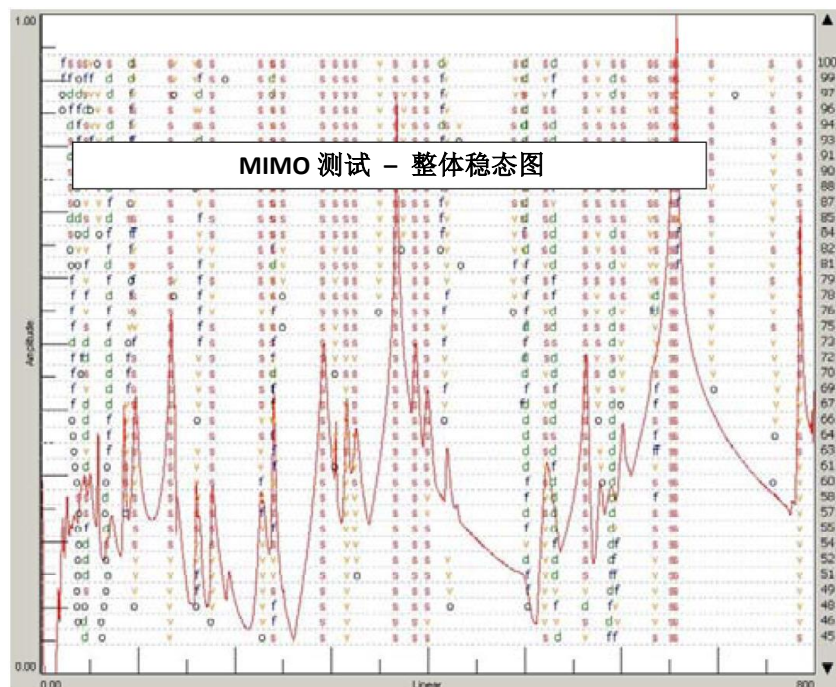


图 4 MIMO 方式 FRF 的稳态图

实际问题取决于这些数据。FRF 必须是按一致的方式获得的。SISO 测试不能提供一致的数据，但是 MIMO 测试基于数据采集特点通常能保证数据一致。

我希望这能解释能让你明白，对于任何多参考点测试而言，为什么采集数据按一致的方式非常重要。由各个参考点分别采集单输入数据不能为模态参数估计提供最佳的数据。为多参考点提供更一致相关的 FRF 数据，MIMO 测试是必需的。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





有人告诉我，力谱衰减超过 20dB，FRF 就不能接受。  
让我们来讨论这个。

对许多人来说，这是个非常敏感的话题。我记得过去曾有人声称力谱的衰减不能超过 1dB，这是个非常严格的准则。事实上，这会激励起更多阶感兴趣频带外的模态，使加速度计潜在地存在过载，因而得到的测量是差质量的。

让我们来理解为什么我们要制定模态测试的准则。许多时候可能我们想提供一些准则作为典型的做法用于指导测试。这样的目的是保护我们的测试结果，但这在一些测试情景中并不总是有用。

但问题是一些“建议准则”被当成了教条或戒律。可能一些“建议准则”建立的时间在 20 年前或者更久远，那时的测试设备远不如今天高级，可能当时 12 位 AD 的采集设备非常普遍。但是这些准则在今天可能就不那么关键了，当今使用的测试设备更先进，现普遍使用 24 位 AD 的采集系统。

因此，虽然我认为“建议做法”明确需要，但是我同时也认为我们必须认识到它们只是建议，我们需要明白怎样去解释测量是否有用。

为了解释这一点，用锤击法对一块简单的平板进行了测试。共进行两次测试，一次使用硬锤头，力谱在感兴趣的频带内有 10dB 的衰减。另一次使用软锤头，总共有 30~35dB 的衰减，在前三分之一的频带内有近 10dB 的衰减，中间三分之一的频带有近 25dB 的衰减，剩余的衰减量位于最后三分之一的频带。硬、软锤头的力谱如图 1 所示。

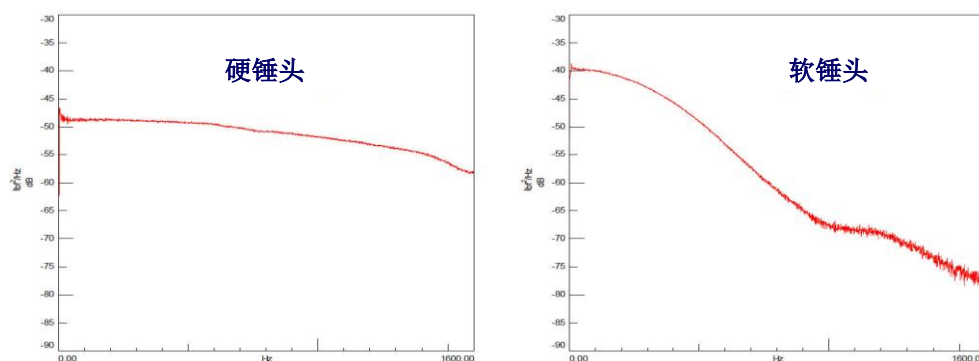


图 1 比较硬锤头和软锤头的力谱

硬锤头的驱动点 FRF 如图 2 所示，软锤头的驱动点 FRF 如图 3 所示。显然，硬锤头的 FRF 是一次质量更高的测量，这一点从相干也能得到证实。需要注意的是软锤头的 FRF 整体在高频段有一些变化，高频段相干的质量也有一些轻微的降低。

现在我们必须问我们自己，为什么我们要进行 FRF 测量和模态测试。有时测试目的是为一些特定的应用获得高质量的 FRF 测量。但有时，测试的目的是为了获得结构一般意义上的特征振型，这时可能就不需要与特定应用要求相同的高质量测量了。思考一下，它就像为家庭建房项目购买木料一样，我们不会总为整个项目购买无疙瘩的木材，有时低质量的木

材能满足工程大多数的应用。

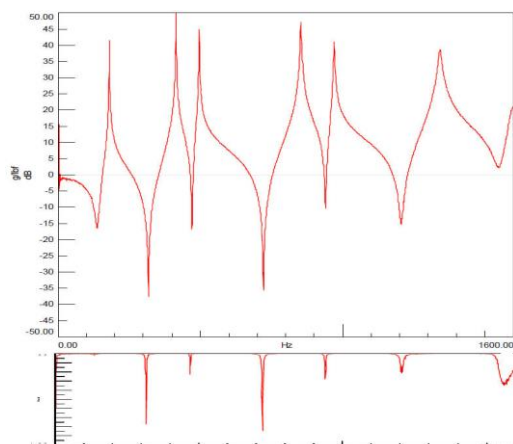


图2 硬锤头的 FRF 和相干

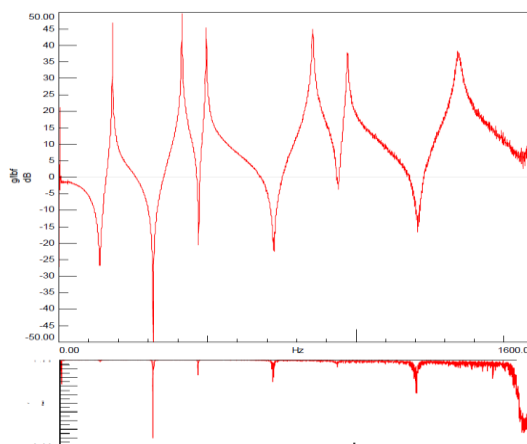


图3 软锤头的 FRF 和相干

现在，我可能总喜欢一直进行高质量的测试，但有时这样高质量的测量所付出的代价可能会高得离谱。因此，让我们来看一下之前进行的测试有多好或多差。对两次测量进行模态参数估计。一般意义的模态振型如图4所示，用作参考。两组模态数据的 MAC 如表1所示。两次测试得到的模态振型本质上是一样的。因此，两次 FRF 测量似乎对于简单评估结构模态振型是足够的。

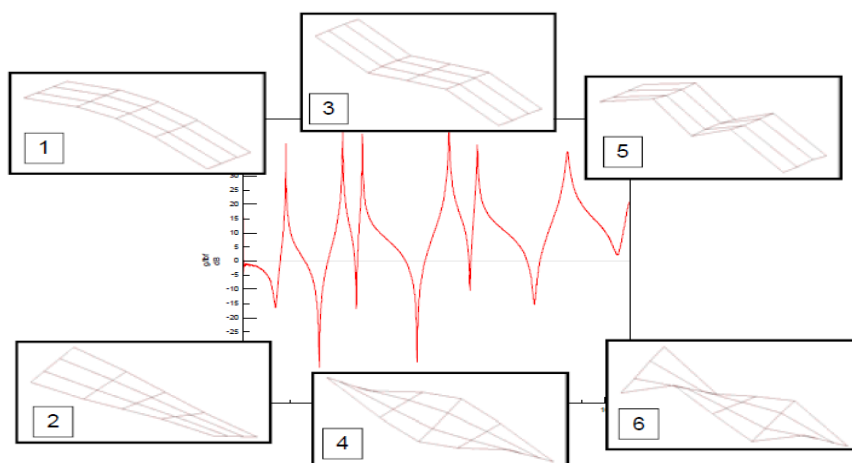


图4 结构的模态振型

表1 两组模态的 MAC

频率	179.3 Hz	413.5 Hz	495.1 Hz	853.7 Hz	970.6 Hz	1345.2 Hz
179.3 Hz	100	0.006	0.152	0.048	32.868	0.006
413.5 Hz	0.006	100	0.015	0.123	0.002	9.974
495.1 Hz	0.152	0.015	100	0.001	0.165	0.075
853.7 Hz	0.048	0.124	0.001	100	0	0.179
970.6 Hz	32.873	0.002	0.165	0	100	0
1345.2 Hz	0.006	9.975	0.075	0.179	0	100

现在，我不是要提倡这类力谱衰减是可接受的，但有时从这些数据中还是可以获得有用的信息。虽然我们有“建议准则”，但这并不意味着那些数据就是无用的。但就怎么采集数据和解释结果，我们需要特别仔细。

我希望这些解释能帮助你明白，虽然我们有“建议准则”，但有时我们仍然使用一些建议准则接受范围之外的信息。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





有时出现连击时，换个锤头就可消除连击，这样做正确吗？  
让我们通过一些测试来看有什么影响。

之前我们已经讨论过连击，但这次讨论的情况完全不同于以往。表面看来，这可能是一种缓解连击的方法，但这对结果有影响。因此，让我们对前一篇文章中讨论用到的那个结构进行一些测量，以表明这样做有什么影响。

上一次我们已经讨论了力锤的衰减，并且表明了衰减本身并不会显著降低系统相应模态振型的质量，但是 FRF 的质量有些降低了。现在，在第一次测量中，我们相当认真，避免了任何连击（使用硬锤头）。但是，我们对这个结构又进行了一些测量，确保一些测量中包含了连击。实际上，我们获得的整组数据，都特意确保每个 FRF 的锤击激励都有二次连击。作为参考，单次锤击和二次连击的典型力谱如图 1 所示。

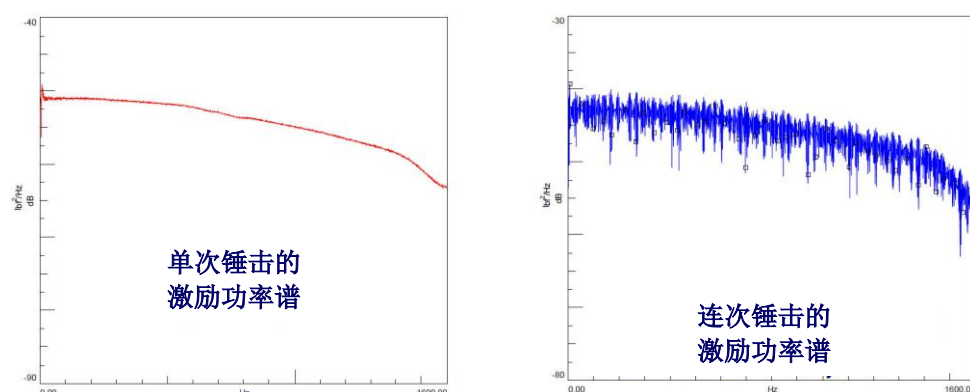


图 1 比较单次和连击的力谱

虽然二次连击的力谱在整个频带上存在一些变化，但是要重点注意到在主要关心的频带上力谱并没有严重衰减。作为参考，图 2 给出了这个结构前 6 阶典型的模态振型。

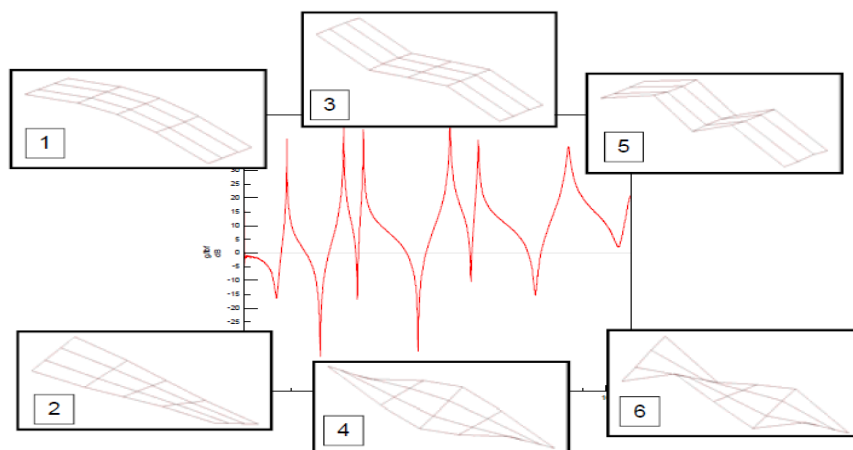


图 2 结构的模态振型

现在，在这儿用于比较的参考数据是使用硬软件，不存在二次连击的数据。对这个结构可能会出现二次连击的位置使用软锤头进行激励，采集一些测量数据。（结构外部 10 个点的 FRF 由硬锤头获得，内部 10 个点的 FRF 由软锤头获得，这样做只是为了合理的阐述这个问题。）作为比较，两个锤头的 FRF，硬锤头和软锤头分别如图 3 和图 4 所示。

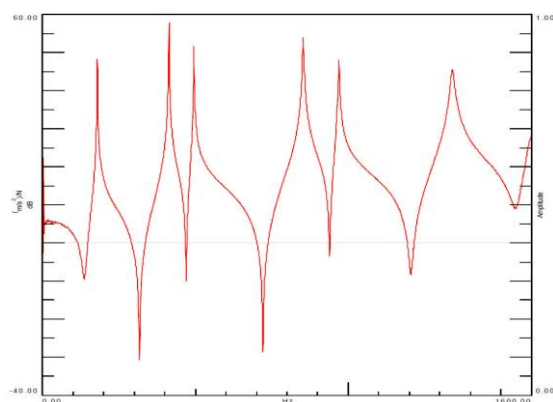


图 3 硬锤头典型的 FRF

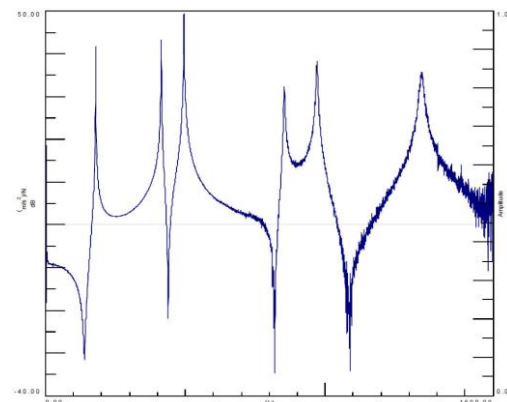


图 4 软锤头典型的 FRF

第一次比较，MAC 值由参考模态数据和“混合”模态数据组计算得到。混合模态数据组使用的数据一些由硬锤头激励得到，另一些由软锤头激励得到。最开始的想法是使用软锤头最小化二次连击。对于这种情况的 MAC 值如表 1 所示。

表 1 参考测试和混合测试数据组的 MAC

频率	179.270 Hz	413.356 Hz	495.121 Hz	853.661 Hz	970.418 Hz	1345.456 Hz
179.304 Hz	<b>98.547</b>	0.207	0.048	0.17	30.453	0.114
413.501 Hz	0.052	<b>98.088</b>	0.007	0.253	0.149	10.311
495.105 Hz	0.114	0.189	<b>99.798</b>	0.144	0.173	0.216
853.646 Hz	0.107	0.573	0.002	<b>97.825</b>	0.121	0.31
970.634 Hz	33.247	0.144	0.09	0.082	<b>95.881</b>	0.126
1345.196 Hz	0.122	9.725	0.07	0.431	0.132	<b>97.921</b>

注意到 MAC 矩阵中对角元素的范围大约是从 95 到 99，非对角元素对这次估计影响不关键，因为对于有限的测点而言，空间混叠是主要因素。还记得上一篇文章中，当比较硬锤头和软锤头的模态数据时，对模态振型而言，二者本质上没有差异。但在这儿，会发生什么状况呢？

本质上，因为我们更换了力锤的锤头，有效地改变了输入力谱。这是因为本质上改变了力锤的校准（或标定）。因为，所有的测量都不是由相同的锤头测量得到的，那么相对于测量的均衡性而言，就存在了一些偏差。这就意味着人为创造了 FRF 尺度的不平衡。因此，这直接意味着在测试过程中我们不应该更换锤头，否则，采集到的 FRF 会存在偏差，除非，我们重新校准以正则化数据采集过程中的影响。

现在，让我们探讨更深一步，使用另一组数据。虽然我不提倡使用连击数据，但是，过去我们曾经展示过，有时我们可能需要采集二次连击的数据，可能这样的数据使用起来也不那么糟糕，只要我们确保所有的数据都是合适的，且相干也不错。

现在，我要使用这样的数据组，所有的 FRF 都存在一些类型的二次连击，但是所有的 FRF 都是由相同硬度的锤头采集得到的。现在，计算另一组 MAC 值，使用这组数据和参考数据组。这种情况的 MAC 值，如表 2 所示。从表 2 可以看出，所有的对角线上的 MAC 元素值都大于 99。因此，这表明这组数据整体上都是不错的，使用相同硬度锤头带二次连击采集得到的 FRF 质量要高于之前部分测点位置使用软锤头获得的 FRF。我猜想你可能从没想到结果是这样的，如果你认为采集二次连击数据的输入差不多具有一致的激励量级，而“混

合”激励数据组却没有，这样是有道理的。

表 2 参考测试和二次连击测试数据组的 MAC

频率	179.454 Hz	414.166 Hz	495.463 Hz	853.208 Hz	972.122 Hz	1346.707 Hz
179.304 Hz	<b>99.634</b>	0.014	0.085	0.093	33.183	0.024
413.501 Hz	0.024	<b>99.823</b>	0.004	0.137	0	12.293
495.105 Hz	0.039	0.036	<b>99.906</b>	0.034	0.093	0.058
853.646 Hz	0.1	0.175	0	<b>99.475</b>	0.065	0.341
970.634 Hz	33.476	0.01	0.117	0.072	<b>99.579</b>	0.051
1345.196 Hz	0.018	11.365	0.06	0.216	0.009	<b>99.292</b>

我希望这些有助于说明二次连击并不是如你所想像的那样糟糕。测试过程中更换锤头，却没有考虑输入力谱的有效变化，那么需要考虑校准的变化。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



某天做的测量与另一天的测量看起来不同，这是怎么回事？  
让我们来考察这个测量，以说明发生了什么。

过去我们已讨论了许多不同的测量问题，但这个问题的确值得重视。当然，从一天到另一天，或者从一小时到另一小时，甚至从一周到另一周的测量总是会有差异，这些生活中的典型细微差异在我们进行结构测试时也是存在的，这是正常的变化。但是，你展示给我的这些测量完全不同于我们正常看到的变化。在这次特定的测量中，在低频段变化很微小，但在高频段变化相当显著。因此，让我们仔细考察这次测量，以探究到底发生了什么。我们主要跟踪的是测试的固定装置，它在这些测量中可能起到了非常重要的作用。

测试对象是一块小型的风机叶片。测试的叶片处于“夹紧”状态。叶片自身重量小于2磅，安装在800磅的光学平台上。光学平台足够大，能充分用于模拟叶片的“夹紧”状态。实际上，有一个可用的分析模型，从这个模型中能够提取到处于“夹紧”状态的叶片模态。然而，分析模型从来都不是完美的，它只能算是一种近似。对于这类简单结构的模型，我们希望能得到相当精确的结果。

因此，首先要获得安装在光学平台上的叶片的频响函数。对这个结构采用法向锤击测试，激励和响应用FFT分析进行测量。叶片通过一个固体安装块和一些螺杆固定在光学平台上。安装块（作为垫片）位于叶片和光学平台之间，螺杆固定它们。固体安装块是必须有的，起到了垫高叶片的作用，当叶片发生弯曲变形时，不至于受到光学平台的干涉。

总的说来，这些频响测量看起来是可接受的，相干也是可接受的。频响函数如图1所示，图1中还包含了一张测试设置照片。频响函数的低频部分我们不关心，因此，这部分被测试照片遮挡起来了。

第一次的测量似乎是可接受的。这次的测量是在周五下午进行的，下一周进行其他一些测试。好的做法是下周一上午再次进行剩余部分的测量。第二次测量总的说来也是可接受的。频响函数如图2所示，图2中还包含了第二次测试的现场照片。由于不关心低频段的频响，因此现场测试照片遮挡了低频段部分。

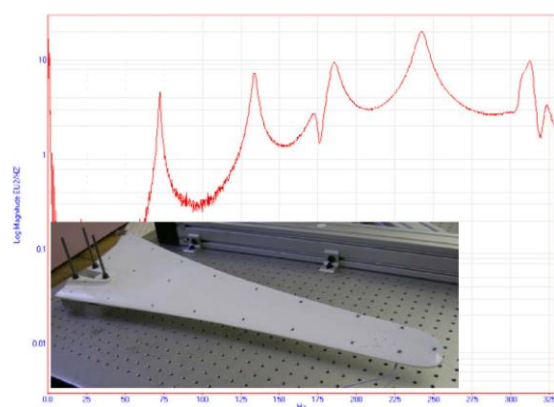


图1 周五的 FRF 和测试设置

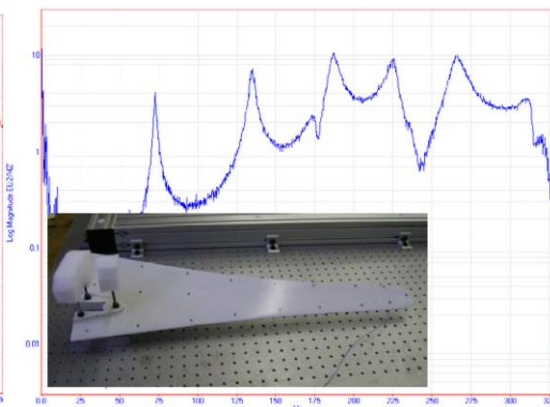


图2 周一的 FRF 和测试设置

但周一上午进行的测量看起来不同于周五进行的测量。周五测量时，一些测试人员由于不小心，被伸出的固定螺杆刮伤了头部。图3 给对了两次测量的比较。

幸运的是，有人注意到了这些显著的不同，因而决定停止测试，以确定什么原因引起了显著的差异。图3 中清楚地表明了，在低频段模态本质上是相同的，存在的差异也是正常的变化。但在高频段却差异显著，宛如对不同的测试对象进行的测量。

显然，第一印象会直接指向用于固定叶片到光学平台的固定装置。但是检查联接、拧紧和装配后，没有发现任何可感觉的不同。

因此，当我第一眼看到这个测量时，我立即怀疑两次测试中可能存在一些不同，可能是一些类型的调谐吸振器效应引起的差异。我为什么会得出这样的结论，是因为在低频段，只存在一般意义上的频率移动，这可能就是调谐的吸振器效应引起的。

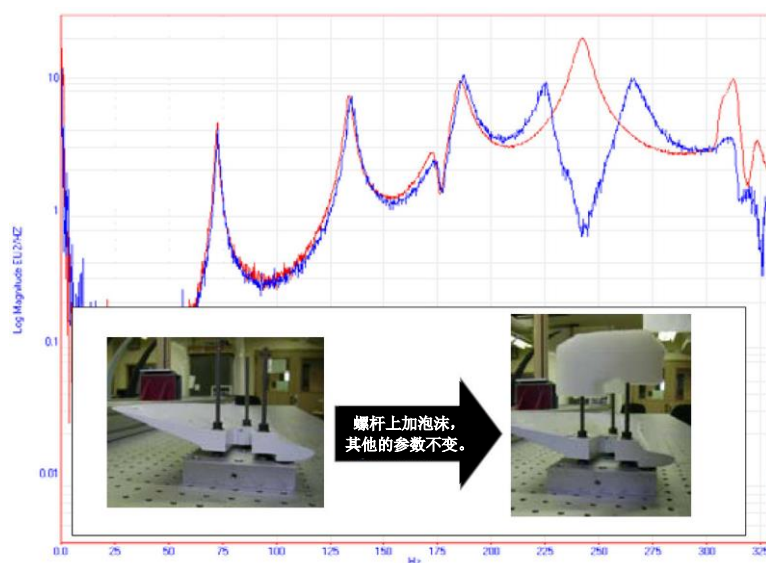


图3 比较周一和周五的测量

因此，在进行了一些侦察工作和询问了一些有关于两次测试不同的基本问题之后，有关这个问题的一些想法出现了。再询问了几个问题和对测试设置照片进行了更仔细的检查后，一件事情引起了我的注意。

原来实验室负责人非常注重安全，三根从叶片和固定块中伸出的螺杆容易引起一些伤害。如果有人围着测试设置不小心，就可能被伸出的螺杆刮伤。因此，作为预防，实验室负责人使用了一些软泡沫安装在长螺杆顶部。（这些泡沫本质上是一些软的包装泡沫，你可以在电子产品的包装箱中找到，质量非常轻，无论什么情况下也不存在结构效应。）但是…

泡沫的确非常非常轻，但是安装在长螺杆的顶部，它改变了悬臂螺杆的模态。说来也奇怪，悬臂螺杆移动后的频率刚好与叶片的某阶固有频率重合。这样一个传统的调谐吸振器效应使得一个模态分裂成了两个模态（见图3 红色曲线的第5阶模态）。毫无疑问，这个效应是非常显著的。

如果你不相信这个可能发生和这个是真的原因，你可以再次测试这个结构五次以上，测试过程中使用和不使用小型包装泡沫在螺杆顶部，这样每次试验就可以复制从周五到周一所做的试验了。

因此，原则是任何动力学测试中的固定装置对测试数据都有影响。在这个例子中，这个影响对叶片的第5阶模态影响非常显著。所有的动力学测试，必须仔细检查任何固定装置。你不知道测试中会发生什么状况。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





我们一直在对比测试与完全固定的分析模型，能在实验室中模拟完全固定的模型吗？  
让我们来考察它以便明白这个问题。

这个问题是一个经常拿来讨论的话题，虽然我正在变老，可能会忘记某些事情，但是这个主题我一直都记得很清楚。它一直被拿来讨论，当然，这是因为分析领域与实验领域是完全不同的。

在分析建模中，确定模型的边界条件总是非常简单。只要我们想，我们可以完全实现自由-自由边界条件。但是现实世界明显不同于分析领域（分析领域充满了“假设条件”，这在现实领域中不太可能实现）。

但是至少我们经常用近似的自由-自由边界条件，也能获得相当不错的效果。事实上，我们经常喜欢按这种边界进行测试，这是因为这种边界条件下，测试固定装置和与边界相关的测试设置只有很小的相互作用，这个边界不同于真正的自由-自由边界。（在上一篇文章中，测试设置顶端轻微的改变，导致测试结果有着显著的改变。）

问题是，我们很多时候都想去验证在部件的连接点施加了约束边界条件的分析模型。从分析角度来讲，这一点很容易实现，但是从现实测试角度出发，因为各种不同的问题，会导致实现起来相当麻烦。这些问题与安装表面的平整度、螺栓预载荷等等相关。

但是容易引起误解的一项是，与建立所谓的固定边界条件相关的刚度到底是多大，质量到底是多少。大多数人都想设计一个“刚度无限大”的支承框架或测试固定装置，但是我们知道任何结构都存在共振频率，问题只是它们的共振频率是多少，对实际建立固定边界条件有何影响。测试固定装置可能对测试前几阶弹性模态是完全胜任的，但是最终固定装置的共振频率可能会与测试对象发生相互作用。

另一个用于模拟固定边界条件是提供大型的地震质量（将结构与大地相连的质量），这通常是实现固定边界条件的一种更好途径。但是很多时候，人们不知道到底要施加多大的质量才能实现这种边界条件。经常，你可能会听到这样的陈述，地震质量应大于测试对象质量的 10 倍。出于某种原因，人们认为二者质量比 10: 1 是所有问题的答案。但是我们忘记了这些“经验法则”是在早年前获得的，那时我们所有的计算都用算尺计算。那个时候的精度量级，可能 10: 1 法则是一个不错的猜想估计。但是现在，所有复杂的模型我们都可计算的今天，我们真的要重新思考 10: 1 法则了。

为了解释这一点，将使用一个简单的类似长梁结构的例子来说明这个。最近，我们测试一根 9 米长的风机叶片在自由-自由边界条件下的挥舞模态。选择这个结构用于讨论质量载荷对模拟固定边界条件的相互影响是非常合适的。

自由-自由边条下测试 9 米长的叶片和建立一个非常粗糙的梁单元叶片有限元模型，分别获得前几阶挥舞模态。这样做的目的是为了比较自由-自由模型和应用了“完美的固定边界的分析模型”的不同模态，以便研究将叶片固定在地面的质量大小的影响。自由-自由测试和分析模型的模态结果如表 1 所示。为了简洁起见，分析模型和进行的测试在这不作描述。考虑到分析模型中梁单元的粗糙程度，这些结果被认为是合理的。



表 1 9 米叶片在自由-自由边界条件下的测试结果和分析模型比较

阶数	分析模型 (Hz)	测试 (Hz)	MAC
1	7.84	7.76	99.85
2	18.5	21.26	98.28
3	34.52	31.34	98.85

现在,用这个分析模型去建立“完美的”固定边界条件模型,将它的结果作为参考结果。同时建立另一个分析模型用于比较添加大量的“地震质量”到叶片模型的根部产生的影响。将这个叶片根部施加不同质量的模型与“完美的”参考模型作比较。将比较它们的频率和振型,以展示为实现约束边界条件而施加不同质量的影响。需要注意的是,施加的质量并不仅仅是集中质量,还有转动惯量,这些转动惯量的影响,对于长悬臂结构,如这根叶片的固定边界条件模型建立是最重要的。这根叶片重约 400 磅,使用 66×72 英寸,厚度为 24 英寸的钢板作为近似的地震质量,其重量约为 22000 磅,重量约 55 倍于叶片。

使用不同集中质量  $M$  和转动惯量  $MR$  建立了一些模型,这些模型将与“完美的”参考模型作比较,比较二者的频率和振型。表 2 仅给出了这些模型的第 1 阶频率,图 1 给出了表 2 中不同情况的 1 阶模态振型比较结果。

表 2 9 米叶片的“完美的”固定边界模型和不同质量模型比较

边界属性		1 阶模态频率 (Hz)	
质量	转动惯量	质量模型	完美模型
$M$	$MR$	5.29	4.36
$2*M$	$MR$	4.87	4.36
$M$	$2*MR$	4.87	4.36
$M$	$10*MR$	4.47	4.36

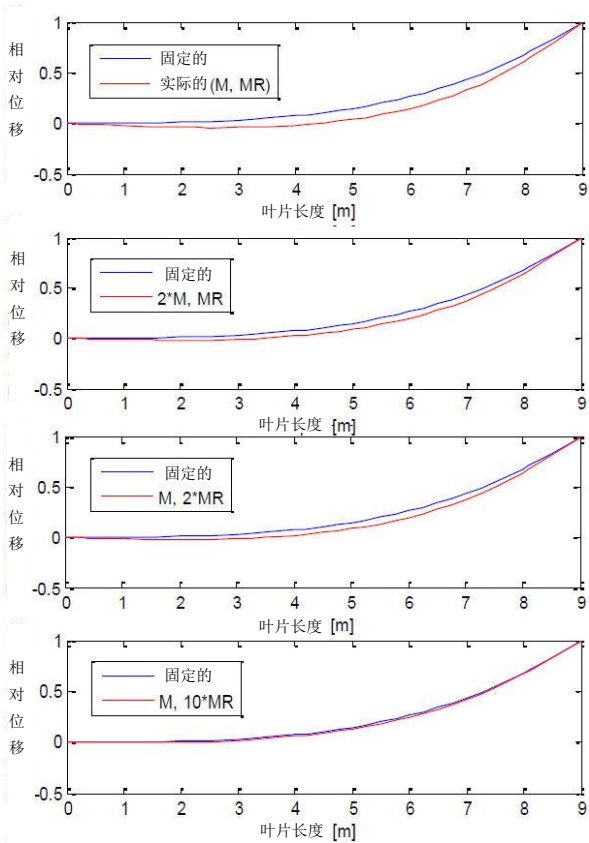


图 1 模态振型曲率比较

首先注意到，只使用质量  $M$  和转动惯量  $MR$  的模型的模态频率与“完美”模型的模态频率的一致性并不好，注意到添加的质量块重量超过 50 倍的叶片重量。同时注意到这个模型的振型也没有与“完美”模型的振型完全重叠。将集中质量加倍，转动惯量不变，模型的结果有所改善，但仍然存在差别。如果转动惯量加倍，集中质量保持不变，结果大致相同。但振型有所改善，但仍存在差异。注意到转动惯量是导致频率和振型与完美模型匹配更一致的最关键因素。如果转动惯量按数量级增加，那么频率会更一致，振型也吻合得非常好。

因此，原则是为了近似固定边界条件，地震质量要非常大，转动惯量的影响更为重要，因为叶片悬臂效应很大。显然，更低重心的不同结构将有不同的结果，但是这个模型明确展示了对于确定悬臂结构的合理特性，地震质量的重要性。

归根到底，你必须决定来自现实世界的固定边界条件存在多大的变化是可接受的，测试中的实际模态振型存在多大的偏移是可接受的。问题是人们经常都不考虑这些问题，因此，不能明确的告之到底多大的偏差是可接受的。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



如果不在结构的固有频率处激励，怎能知道固有频率是多少？

这个很重要，值得讨论。

这个问题，我发现人们经常感到迷惑。很多时候，我听到人说他们不得不微调和调谐激励频率，以便激励频率刚好等于结构的固有频率，否则便不能正确地确定结构的固有频率。我也听到人们说激励信号必须在整个频带上具有宽带能量，否则将不能合理地激励起系统。

这有一个误读，那就是激励频率必须**刚好等于**结构的固有频率，否则结果将无效。按这种方式去做频响函数测试和从测量数据中估计系统的频率和阻尼，的确不会有问题。

现在我们来讨论一些东西，以帮忙你明白为什么测试时我们不必使用激励频率**刚好等于**结构固有频率进行激励，但是我们必须确保我们采集得到的数据是高质量的，因为我们没有数据可替代。

现在让我们后退一步，考察一些更简单，更普遍的东西。考虑用直线拟合一些测量数据。我打算用最小二乘拟合方法为图1所示的数据进行拟合。我们知道，可以用任何曲线拟合这些数据，但对于这组数据，似乎线性拟合最合适。当然，使用的数学模型如

$$y = mx + b$$

这两个参数定义这条直线，也就是斜率和y方向的截距。

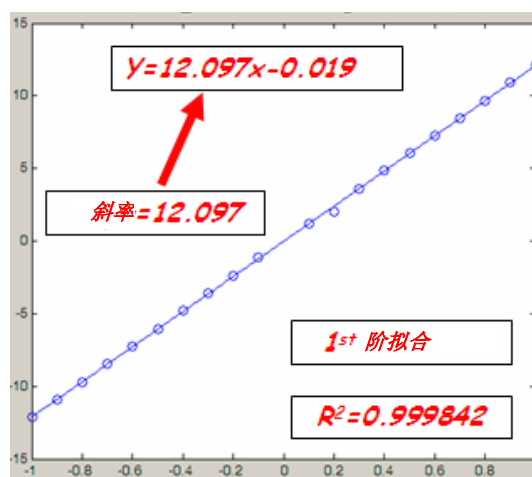


图1 直线拟合的例子

数据和拟合结果所图1所示。我们仔细查看这组数据，知道可以计算斜率，但是我们曾经测量过这个斜率吗？真的没有，我们测量了数据，然后拟合出了一个数学函数，使用这个数学函数获得了斜率，从技术层面上讲，我们并没有测量这个斜率。让我们再考虑y方向的截距。如果你仔细考察这些数据，你会知道我们并不是从这些测量数据中直接获得了y方向的截距。但我们可以肯定地说，我们可以得到y方向的截距，但是我们从来没有实际测量它，对吧？让我们更进一步考虑，是否在一个给定的x值，假设为0.707，能得到函数y的值。然而，我们从没有在这个特定的x值处实际测量函数的y值，但是我们可以说，通过拟合出来的

函数我们能知道它在这个特定 $x$ 处的值大小。我认为通过这些陈述，我们已经明白了，我们是能得到这个值，对吧？

现在将这个逻辑应用到单自由度的频响函数数学表达式上。用部分分式的形式写出单自由度的系统传递函数，形如

$$h(s) = \frac{a_1}{(s-p_1)} + \frac{a_1^*}{(s-p_1^*)}$$

同时，也可以写出频响函数形如

$$h(j\omega) = h(s)|_{s=j\omega} = \frac{a_1}{(j\omega-p_1)} + \frac{a_1^*}{(j\omega-p_1^*)}$$

首先，我们必须意识到这个函数是个频域函数，它包含了两个常数，分别为极点“ $p$ ”和留数“ $r$ ”，这两个参数是我们需要提取的（犹如提取图1中的直线斜率和 $y$ 方向截距一样）。现在我们可以估算这个函数在一系列频率间隔 $\Delta f$ 处的值，如图2所示。这些数据点是我们通过频响函数测量得到的。我们可以对这些数据拟合出一条曲线，这条曲线就是复数形式的频响函数，从这条曲线中提取我们感兴趣的参数。

对频响函数可以使用直线拟合中相同的道理。对这些测量数据进行曲线拟合，提取到一些关键参数，而这些参数是用来定义这条曲线的。这些参数也就是极点和留数。这跟我们之前讨论的直线拟合是一样的，我们不一定需要一个数据点**刚好等于**结构的固有频率，以便获得极点和留数估计。只要我们获得描述这个函数的高质量数据，那么对这些测量数据，我就能拟合出这个单自由度模型，提取我们感兴趣的参数，极点和留数。

当然我可以将单自由度系统的拟合原理推广到多自由度系统，当然这个问题数学上会变得更为复杂，但是整个处理过程是相同的。多自由度频响函数拟合如图3所示。

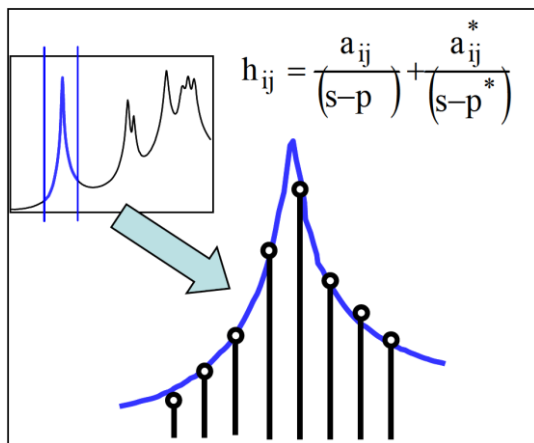


图2 概念上的单自由度拟合

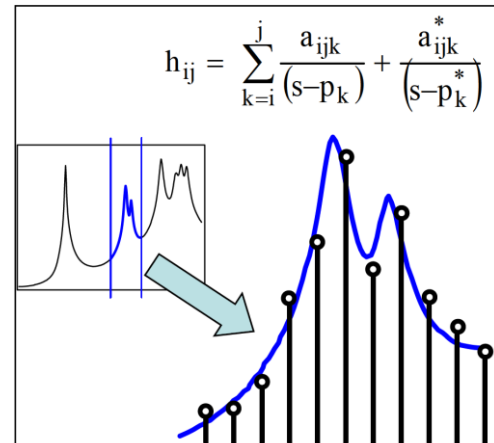


图3 概念上的多自由度拟合

获得的数据是选择的频率间隔处的数据，在参数估计过程中提取模态时没有必要确保频率数据点**刚好等于**结构固有频率。但是，我不得不提醒各位的是，采集的数据必须是最合适的测量方法得到的，以确保在测量数据与拟合的曲线之间存在很小的偏差。这条拟合的曲线是用来提取极点和留数的。

因此，我希望这些简短的说明能澄清这个事实，那就是测量数据没有必要**刚好等于**结构的固有频率。模态参数提取过程（这不过是一个精心的最小二乘最小误差方法估计），也就是提取极点和留数的过程。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



测试需要多自由的边界条件？这真的重要吗？

这个很重要，值得讨论。

的确，我认为所有的人都对这个感到迷惑。它源于我们非常熟悉的刚体动力学，而这些概念正是围绕它而来的。但是，我们绝不能轻易忽略这些概念。

我的意思是，当一个物体可以用质心来描述，并且结构上所有的点都可以用这个质心来描述时，那么用刚体动力学来描述物体是一个不错的近似。那么在空间上有这么一个点，也仅仅只需要这样一个点来描述与这个点相关的整个结构的运动。这是一个强有力的陈述。它的意思是结构几何上所有的点都可用结构上的一点完全定义。因此，如果确是这样，那么我们可以说这是一个刚体。

这也就是说当我们有一个自由-自由系统时，我们可以用刚体模态来描述这个系统。这意味着这个系统与大地没有任何约束，它完全自由地悬浮在空间。如果情况的确如此，那么我们可以用刚体模态来描述结构在空间上六种完全独立的运动方式。也就是三个主方向的平动和围绕这三个方向的转动。当然，我们不得不认识到这六个独立的运动方式可以是彼此之间的线性组合作为其他的可能运动情况。正因为我们倾向于认为结构在 $x$ ， $y$ ， $z$ 方向运动，但不意味着刚体运动需要完全孤立这三个方向，因而，任何的线性组合也是有效的。

现在我们已经有了刚体模态的概念了。那么，让我们来讨论一根简单的梁，我们可以建立这根梁的有限元模型。我们假设这根梁是等截面，质量均匀分布的，因此，这是一根理想状态的梁。为了进一步简化这个讨论，我们将只考虑平面运动，但是没有理由认为，我们不能将它扩展到一般状态的6自由度。

让我们首先来描述这个平面系统的前几阶模态。图1展示了前四阶模态，注意到前两阶模态是刚体模态，后两阶模态是系统的弹性模态。注意到第1阶模态是上下运动的沉浮模态，第2阶模态是围绕梁几何中心的转动模态。这是完全自由梁结构的自由-自由模态。

现在，当我们在实验室做测试时，我们考虑到梁不能悬浮在空间不受约束。我们考虑施加到梁两端的弹簧刚度的范围。进一步地，我们让这个刚度范围从接近零的状态上升到刚度非常大的状态，接近完全固支状态或完全约束状态，这个示意过程如图2所示。

为了简化起见，我们仅考虑第1阶模态随梁端部弹簧刚度的增加的变化。考察随着刚度的增加，梁的这阶模态将发生怎样的变化。图3展示了梁的这阶模态振型变化，从顶部到底部弹簧刚度逐渐增加。

第1个振型图是自由-自由状态的第1阶模态振型。因此，当我们增加梁端部的刚度时，梁的固有频率将向上移动，因为刚度增加了，这与我们的预期一样。因此，如果刚度增大一点点，模态振型可能变化不那么明显。我们注意到第二个振型图中的振型仍然与刚体模态很相似，但是已经有了轻微的弯曲。随着刚度的增加，我们注意到第三幅振型图看起来不像完美的刚体模态了，振型的弯曲更大，更像系统的第1阶弹性模态。等到我们再增大刚度，第四和第五个振型图已经完全不再像刚体模态了，此时，模态振型本质上真的像弹性模态，还是带有小许刚体运动。

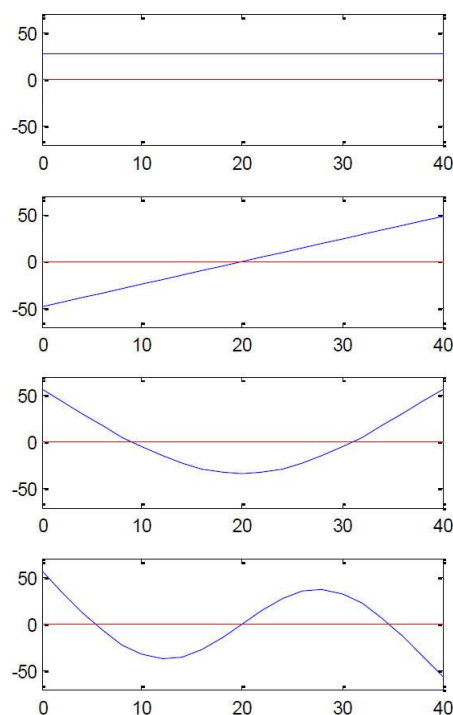


图1 自由-自由梁模态

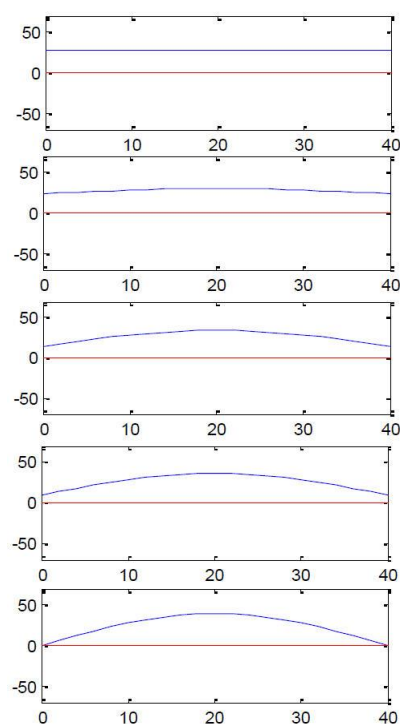


图3 1阶模态振型的演变

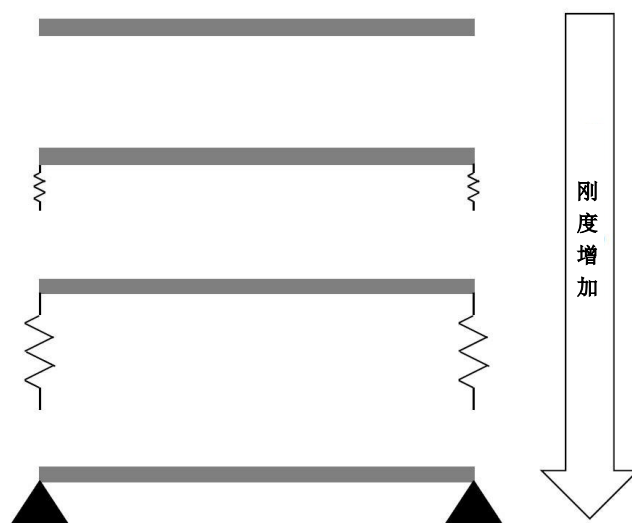
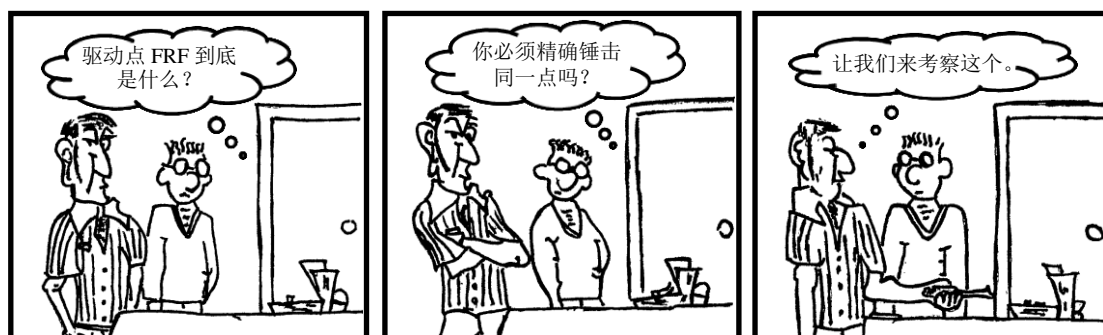


图2 梁的弹性支承

到这件事情基本上讲完了。当系统完全自由-自由时，刚体模态才是真正的刚体模态。一旦任何大小的刚度施加到梁的端部，那么模态振型将由刚体类型模态向弹性类型模态转变，而刚体模态和弹性模态的比重严重依赖于增加的刚度大小和结构自身的刚度。

这就意味着我们在实验室里测量任何所谓的自由-自由状态的结构，实际的刚体模态总是包含一些弹性模态，真的不是一个完美的刚体模态。依赖于怎样的测试设置和自由-自由悬挂刚度，这将对刚体模态有着直接的影响。我希望这些简短的解释已经澄清了你之前已有的任何可能的误解。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





驱动点FRF到底是什么？你必须精确锤击同一点吗？  
让我们来考察这个。

实验模态测试中，经常会提到有关驱动点测量的问题。当进行测试时，特别是驱动点测量时，需要考虑一些事情。因此，讨论驱动点测量很有必要。

驱动点测量是一个非常重要的测量，是实验模态测试的一部分。驱动点的频响函数定义为对结构进行输入力和输出响应的测量是在同一测点同一方向进行的测量。当我们讨论这类测量时，需要考虑几个事情。

毫无疑问，当你同时在这个位置测量响应时，实际上很难再在这一位置进行锤击。因此，驱动点测量有一些现实影响需要考虑。我遇到过一些情况，为了进行驱动点的频响函数测量，加速度计的外壳遭受到了力锤锤击。按这种方式进行测量，是绝对不推荐的。因此，我们需要思考怎样进行测量，怎样考虑测量中的现实影响。

因此，显然我们需要设法获得想要的结果，锤击应尽可能靠近加速度计的测量位置，但又不能对加速度计进行锤击。获得想要的结果方法之一是在结构的背面进行测量。如果横截面刚度非常大或者是实心截面，那么这种方法似乎是获得想要的结果的一种可能方法。唯一的差别在于需要考虑测量的相位，所以，如果加速度计的正敏感方向与想要的测量相差180度的话，那么需要修正相位。几乎每个模态分析软件都允许通过指定测量的“+”向或“-”向来进行相位修正。因而，这一点也不是问题（但我们将讨论某些情况下的一个困难之处）。

另一种获得驱动点测量的方法是锤击测量响应的加速度计旁边。这其实不是真正意义上的驱动点测量，但是如果被测结构非常大，那么这也不是问题。假如我对一个大的风机叶片进行测量，那么锤击位置的细小差异带来的影响本质上将不明显。但是如果我对一个非常小的结构，如磁盘驱动器或者喷气式发动机涡轮叶片进行相同的驱动点测量，那么，结构的尺寸相对于加速度计的实际几何位置 and 实际锤击位置的小差异而言，也可能导致驱动点测量存在相当显著的变化。

存在的影响很大程度上依赖于在那个非常小的距离上模态振型值的变化。如果模态振型值变化不大，那么真实的驱动点测量和实际的驱动点测量之间的差别本质上无关紧要。但是，随着结构变得越来越小或者考虑更高阶模态，那么，模态振型的实际变化将存在巨大的影响。这一点可以用描述频响函数的运动方程来说明。单阶模态的频响函数用模态振型值近似表达为

$$h(j\omega) = h(s)|_{s=j\omega} = \frac{(qu_i u_j)}{(j\omega - p_1)} + \frac{(qu_i u_j)^*}{(j\omega - p_1^*)}$$

显然，如果测点“i”和测点“j”之间的模态振型值非常小，那么实际测量的频响函数和驱动点频响函数之间的变化将非常小。因此，这完全取决于结构尺寸和加速度计与锤击位置之间非常小的距离上的模态振型值的变化。

让我们来讨论另一种情况，这个可能是个更普遍的问题，需要着重强调。很多时候，为了方便起见，测量时加速度计安装在结构的背面。如果待测结构横截面是实心的或者刚度

非常大，那么按这种方式进行测量似乎是合理的。或者由于空间上的限制，这样测量可能不行。在这用一根简单的管状梁结构来展示一些需要考虑的额外关心项。梁截面如图1所示，用两个小泪珠状加速度计安装在结构上测量响应，所图1左侧所示，红色加速度计表示真正的驱动点测量，蓝色加速度计表示近似的驱动点测量，蓝色可能是典型的测量方式。显然，按这样进行驱动点FRF测量是可行的，因为测量位置是梁的端部，梁结构可以满足传感器安装要求。但是，如果需要在梁远离端部的中部进行测量，那么就不可能进行真正的驱动点测量了。（作为参考，这是一个铝质的梁，长约60英寸，截面尺寸为2\*1英寸，壁厚3/16英寸。）

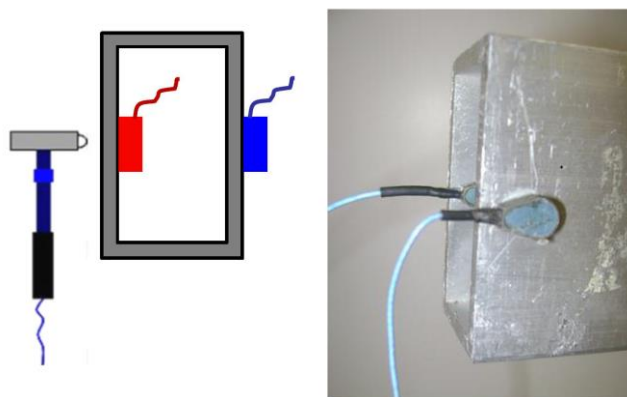


图1 梁测量示意图

现在对梁进行锤击测试，带宽超过4000Hz，并且放大1100Hz以内的频带，这样能更清楚地看出频响函数的差异。图2展示了频响函数的虚部，两条曲线（红色为真正的驱动点测量，蓝色为近似的驱动点测量）重叠在一起便于比较。本质上，频响函数的虚部没有差别。我们记得，对于模态相隔较远的比例阻尼系统，其频响函数的虚部在实部为零处将存在峰值。图2看起来指明了二者没有一点区别，这将导致你相信这次测量没有误差。

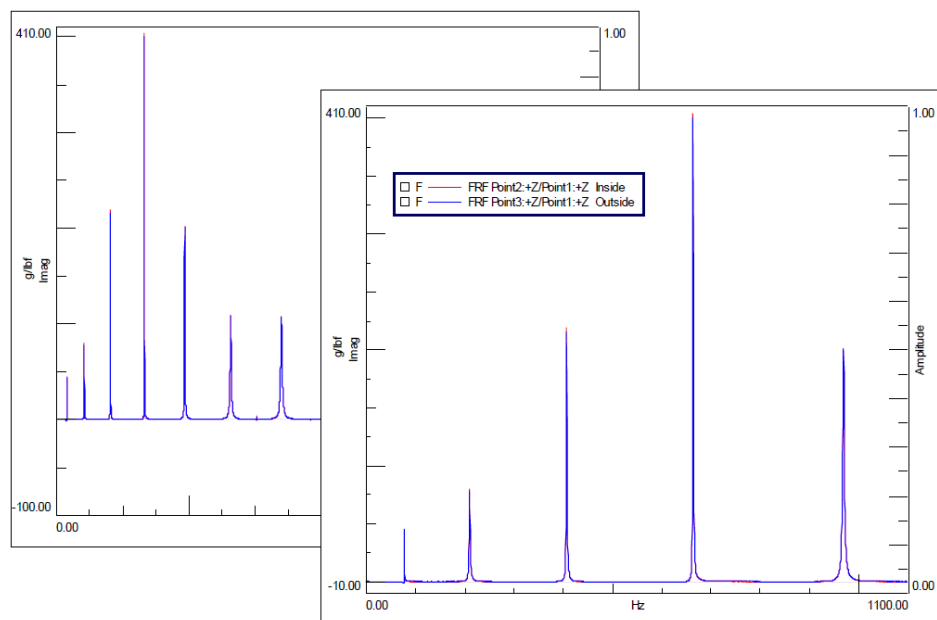


图2 FRF的虚部

然而，如果我们观察频响函数的幅值，那么，我们将看出二者有差异。注意到两个测量中反共振峰都没有重合。这直接与两个测量之间的相位差有关。虽然两个测量的幅值重叠不错，但是两个测量函数之间的相位却存在明显的差异。初看这根梁的截面发现真正的驱动点测量和近似的驱动点测量之间的差异完全不影响低阶模态，但是，可以清晰地看出两条曲线存在差异。（为了确认没有测量仪器问题，将两个加速度计同时安装在顶部，得到的FRF完

全一样。)

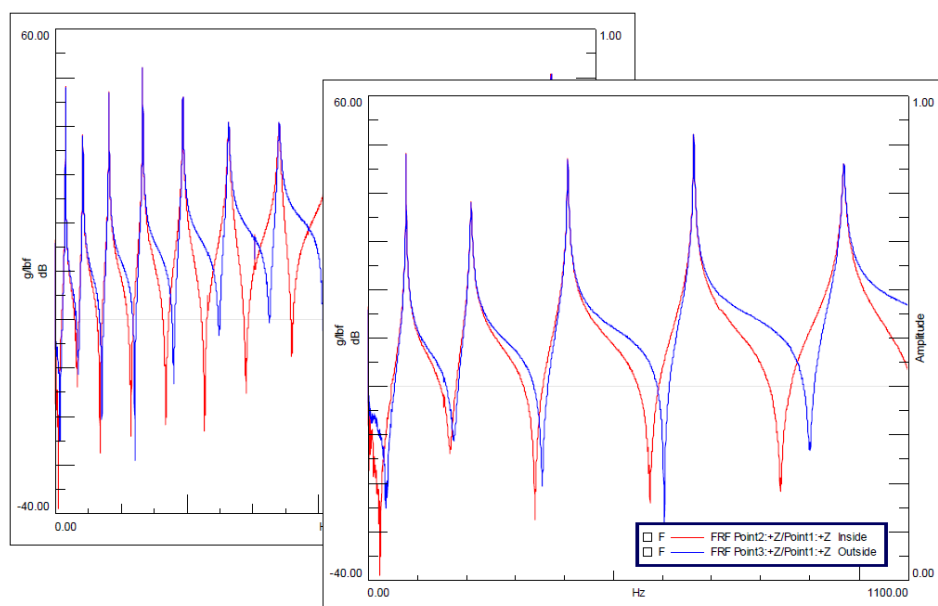


图3 FRF的幅值部分

虽然幅值可能给出了模态振型好的描述，但是要考虑更重要的方面是，是否这些FRF会被用于任何基于频率的子结构类型应用，那么相位/反共振峰问题将在数字化处理任何非一致性数据方面带来困难，这些非一致性的数据可能是由不同的测点测量得到的。我希望现在你对驱动点测量有了更深入的认识。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



我们校正了复合平板模型, 但属性不符合实际情况。模型能用于响应研究吗?  
让我们来考察它, 以便明白这个问题。

这个问题人们经常会感到迷惑。分析模型作为系统特征的一种近似, 很多时候我们使用近似或者等效方式建模, 帮助我们获得正确的模型整体特性。但是, 它未必就意味着模型代表了实际的物理属性, 因为我们可能期待能获得这些物理属性, 就像从材料属性表中查找得到一样。

实际上, 我有一个非常棒的例子, 用它来描述复合平板的建模是极其合适的, 这个平板采用了一些完全不同的建模策略。我真的不需要关心建模方法和策略的具体细节, 只将关注进行模型校正后导致的材料属性混乱。

建立了一个风机叶片复合材料截面的有限元模型, 物理结构有一层轻质木料内芯和每面有 5 层树脂纤维层 (0-90 度经纬架构)。有限元模型使用了独特的建模策略来表征树脂/纤维复合材料, 使用板和梁公式来表征嵌入树脂中的纤维的剪切和弯曲特性, 整个结构建模成一个平面模型。这种建模方式过去一直使用, 制造了这个模型的一个原型试件, 通过模态测试验证模型的有效性。对 3\*3 英尺的平板原型进行模态测试, 边界条件为自由-自由边界条件, 同时每面用 500 磅的重块夹紧一条边作为端部约束边界条件, 每次夹紧一条边, 共 4 次。由材料组提供材料属性, 这些材料属性被认为用于确定模型的特性是精确的。建立的有限元模型使用材料组提供的这些材料属性。进行的自由-自由模态测试用于研究模型的准确性。

有限元模型和自由-自由边界模态的前 12 阶模态的 MAC 值非常不错, 但是系统所有的模态频率值都有一致的偏移。校正的模型研究表明轻质木料的材料属性发生了显著变化, 这使得频率差异大为减少, 但前提条件是树脂和纤维的材料属性是正确的。轻质木料内核几何位置上位于平板的中性轴上, 为了实现频率移动, 则木料内核的刚度需要发生极大的改变。校正后的木料属性的杨氏模量基本上要达到钢的属性值。从实际角度上看, 虽然这似乎是不现实的, 但实际情况是使用了复合材料的有限单元近似需要这样的刚度, 这样才能合理地描述模态特征。原始的自由-自由边界的相关性结果和校正后的自由-自由边界的相关性结果如表 1 所示。

为了证实有限元模型是系统的合理近似, 虽然轻质木料使用了不现实的材料属性, 对平板在 4 种受挠动的边界条件下进行测试, 即每次夹住平板四条边中的一条进行测试。有限元模型使用**校正后的材料属性**, 建立这四种边界配置的模型, 得到了可比较的结果。为了保持文章的简洁, 在这只给出了有限的结果。表 2 中给出了**材料属性校正后**的有限元模型与试验的相关性结果, 给出的结果只是复合平板在实验室中用 500 磅重块锚住更刚和更柔方向的结果, 其他的未给出。有限元模型中也包含了用于锚住的重块, 这样才能最佳描述夹紧的边界。显然, 校正后的参数对于预测自由-自由复合平板边界条件的重大变化是合适的。

因此, 人们不禁会问, 怎样才能获得轻质木料接近钢的不同材料属性, 这样才能使模型趋于合理。这个问题一针见血, 这也是我们需要讨论的问题。我有一个非常不错的例子,

我认为通过它你将很快就能接受。

表 1 自由-自由复合平板模型校正前（左）和校正后（右）的相关性

#	FEA/Hz	EMA/Hz	MAC	#	FEA/Hz	EMA/Hz	MAC
1	22.13	49.90	99.9	1	49.64	49.90	100
2	48.82	84.34	99.3	2	87.19	84.34	99.8
3	65.20	129.94	99.7	3	131.23	129.94	99.9
4	101.74	138.49	98.7	4	134.28	138.49	99.6
5	109.56	166.55	99.8	5	163.65	166.55	99.9
6	128.46	230.26	99.6	6	229.83	230.26	99.8
7	135.95	252.14	99.3	7	249.63	252.14	99.8
8	142.08	267.53	99.9	8	266.60	267.53	99.8
9	194.58	359.29	96.6	9	355.74	359.29	99.5
10	204.93	386.93	97.6	10	381.52	382.79	97.1

表 2 校正的有限元模型与平板在夹紧一条边受显著挠动的边界条下两次不同测试的相关性



#	FEA/Hz	EMA/Hz	MAC	#	FEA/Hz	EMA/Hz	MAC
1	20.06	19.19	99.1	1	13.93	12.68	99.2
2	32.86	31.98	99.1	2	30.20	29.54	99.6
3	99.69	98.19	98.9	3	82.12	84.54	94.7
4	124.61	127.25	97.8	4	108.58	109.27	99.6
5	133.35	135.64	98.2	5	143.58	147.37	99.8
6	199.99	204.16	99.4	6	203.78	208.57	99.0
7	241.21	241.29	99.2	7	224.81	229.96	97.6
8	281.52	298.25	97.5	8	236.02	240.43	99.1
9	307.01	317.41	94.4	9	329.40	338.66	99.0
10	355.27	354.81	98.1	10	360.70	363.54	98.0

我们知道工字梁可以得到从工字梁边缘到中性轴的惯性矩，但是我们可以将其缩减成一个等效的矩形截面，得到相同的有效刚度，如图 1 上部分所示。我确定获得了合理的刚度，能得到系统正确的变形。但是，如果你观察横截面，你可能会说它一点也不像工字梁。

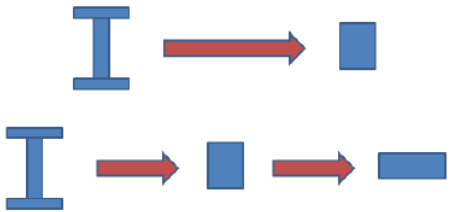


图 1 等效截面属性示意图

在复合平板模型中，我们改变了轻质木料的属性，模型中使用的有效复合材料并没有真实地描述材料的实际刚度。因为复合纤维在轻质木料中性轴的外侧，它们对定义系统刚度的影响是至关重要的。在第一个模型中，我们使用了“异想天开”的材料属性，因此，反映

刚度差异的唯一方法是调整轻质木料的杨氏模量。因此，轻质木料不得不非常刚。虽然我们从现实角度上可能不相信那个杨氏模量，但是就模型而言，轻质木料又需要那么刚。如果你将轻质木料、树脂和纤维**作为一个完整单元**，考虑它们整体的抗弯刚度  $EI$ ，那么才能正确地描述总刚度和质量分布。这样我们才能正确预测模型的前 12 阶模态，2 种不同的扰动边界条件的前 12 阶模态才能预测正确。

让我们更进一步考虑，考虑图 1 的下部分截面。出于某种原因，我们说不能让近似的矩形截面与它实际情况一样高，需要将矩形截面高度**减半**，之前的高度作为厚度。为了实现这一点，我们将需要稍微改变刚度，因为关于弱轴的惯性矩  $I$  不会与更厚截面一样刚。因为惯性矩  $I$  有  $t^3$  项，我们不得不通过调整  $EI$  项来增加更薄截面的刚度。因此，杨氏模量  $E$  需要通过  $2^3$  调整，使得整个横截面有相同的有效刚度。但是材料的实际杨氏模量  $E$  不是那个值，有限元模型需要调整材料属性去补偿物理尺寸方面的改变。

因此，原则是我们要根据整体质量和刚度分布考虑所有的因素，这样才能使系统有正常的整体有效的描述，以便测量的**响应**是合理的，并且结构有正常的整体质量和整体刚度，这样如果你施加一个静态力在结构上，你才能得到正确的位移。

作为备注，最终材料的属性需用校正的材料测试方法进行重新评估，有限元模型使用校正的材料属性才能极大地改进得到可接受的频率和模态振型。这样所有的材料属性才与我们期望的一致。但是原则是，当只考虑系统响应时，校正模型的任何部分都可能用于系统特征的合理估计。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





你能再次解释复模态指示函数 (CMIF) 吗? 这些交叉频率是什么?

这有些重要的概念需要讨论。

我听到许多人说复模态指示函数令人迷惑。但它真的不是那么难于理解, 我刚好有些例子能让人们正确地理解它。

首先, 让我们给出一些不寻常的数学公式, 这些数学公式是开始这个话题所必需的。本质上, 复模态指示函数 (CMIF) 使用频率响应矩阵并执行奇异值分解 (SVD) 去确定在频响函数 (FRF) 矩阵的每条谱线中存在多少个“重要的”特征值。

至少可以说, 那句话只不过是一句总结性的话, 让我们来写出相应的方程, 并试图进行分解, 以便我们深入地理解。如果我们采集了一组多参考点的 FRF 数据, 那么我将有一个 FRF 矩阵。通过 SVD 我可以将方程写成

$$[H]=[U][S][V]^T$$

我将其写成展开式的形式, 以展示一些重要的部分

$$[H]=\begin{bmatrix} \{u_1\} & \{u_2\} & \{u_3\} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & & & \\ & S_2 & & \\ & & S_3 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{v_1\}^T \\ \{v_2\}^T \\ \{v_3\}^T \\ \vdots \end{bmatrix}$$

现在我们可以看到, 这有矩阵[U]和矩阵[V], 它们包含了特征向量 (具体来说是左向量和右向量) 和一个标量值的对角阵[S], 这些标量值称为奇异值。十年前的文章对奇异值有更详细的描述。当然, SVD 最重要的部分是可以写成由组成 FRF 矩阵的每个子块之和的形式。

当我们进行 SVD 时, 并且绘出这些奇异值, 可以得到条数与参考点数目相等的曲线, 得到在考虑的带宽内每条谱线上的奇异值。因此, 如果这有 3 个参考点, 那么这将有 3 条奇异值曲线, 即  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , 这些值是在考虑的带宽上每条谱线上的值。如果我们绘这些值, 那么将得到那个频带上三条不同的曲线, 这些奇异值也就是第二个方程中的对角阵[S]矩阵中的值。这三条曲线也就是我们感兴趣的 CMIF (但特征向量也起到了一定作用, 稍后将作解释)。一组 CMIF 曲线如图 1 所示, 图 1 的上部分展示了一种形式的 CMIF, 下部分展示了另一种形式的 CMIF。

在图 1 中的 CMIF 中, 注意到上图中的蓝色曲线大于红色和绿色曲线。在这条 CMIF (蓝色) 中, 不管峰值在哪, 只要有一个峰值就是一阶模态存在的指示。在图 1 上部分蓝色曲线中有 3 个峰值, 因此通过这条 CMIF 可以确定存在 3 阶模态。如果在第二条 CMIF 曲线中, 在与第一条曲线相同的峰值频率处也存在峰值, 那么这就指示了结构在那个频率处存在两阶模态, 但是第二条曲线的峰值频率必须与第一条曲线的峰值频率相同, 否则就不是模态。

那么在红色和绿色曲线中的峰值表征了什么, 为什么它们不是模态的指示? 这些峰值就是你问的交叉频率。它们归根到底是你想从奇异值中跟踪到的东西。你想跟踪最大的奇异

值或者你想跟踪与奇异值相关的向量。图 1 下部分曲线跟踪了与奇异值相关的向量，而不是最大的奇异值。因此，你可以看到，当我们跟踪蓝色向量时，它在低频段有峰值，然后稳定地下降。我们也可以跟踪红色向量，起始值较小，在频带的中间部分有峰值，然后稳定下降。然后你也可以看到绿色曲线起始值非常小，最终达到峰值，然后如蓝色和红色曲线一样下降。因此，是跟踪最大奇异值（上部分）还是跟踪与奇异值相关的向量（下部分），它们是不相同的，这依赖于你想在 CMIF 中看到什么。

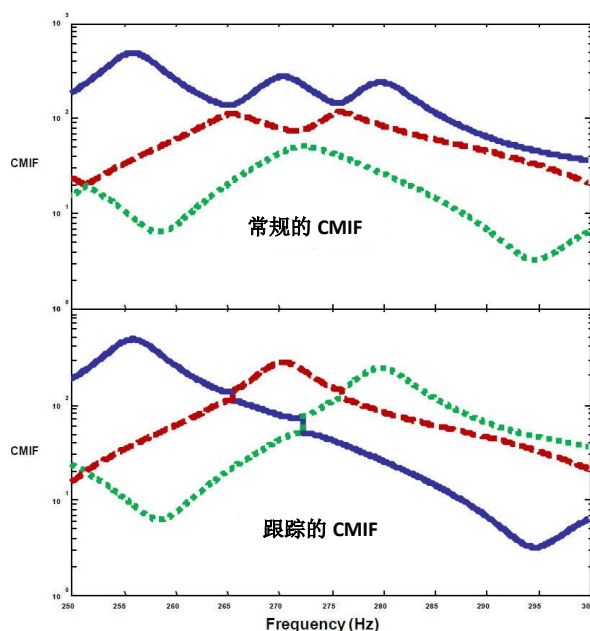


图 1 CMIF（上面）和跟踪的 CMIF（下边）

如果还不清楚，我有一个很好的例子可以解释清楚。如果你刚好是个赛马爱好者，那么我可以将用于 CMIF 的 SVD 与赛马关联起来。在赛马开始之前，所有的马匹都在各自的出发门后一字排开，它们都处于相同的起点上。一旦比赛开始，不同的马将处于不同的位置，并且随着比赛的进行，它们的位置将发生变化。但是你想跟踪谁在最前面还是你想跟踪你的马，这仅仅依赖你的喜好（依赖于是你想知道谁赢，想知道位置等）。图 2 给出了赛马过程中不同时刻的赛马位置的示意图。显然，比赛过程中不同位置，领先的马匹不同。依据谁能赢，你想跟踪谁能赢钱，比赛过程中你跟踪的马匹也在发生变化。但你可能也想跟踪你喜爱的马匹，但它可能没处于领先的位置。

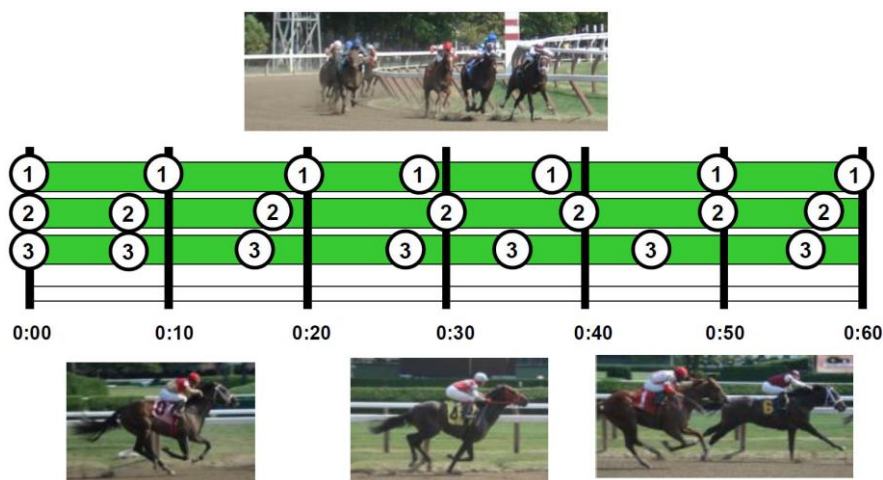


图 2 CMIF/SVD 和赛马

在第一个例子中，图 1 中三个不同频率处各有一个占主导的模态。但如果在相同的频率处有多个模态，那么 CMIF 将会有何变化？那么 CMIF 曲线将在相同的频率处显示一个或多个奇异值峰值。图 3 刚好是这种情况的例子，在 CMIF 的局部放大图中的第一个峰值频率处实际上有 3 个模态，紧跟着是 3 个不同的高频峰值，因此，在局部放大的频带内，通过 CMIF 曲线实际上指示了 6 个模态。（这类似在终点线上有 3 匹马鼻子对齐鼻子，那么需要通过高清照相确定谁是赢者。）

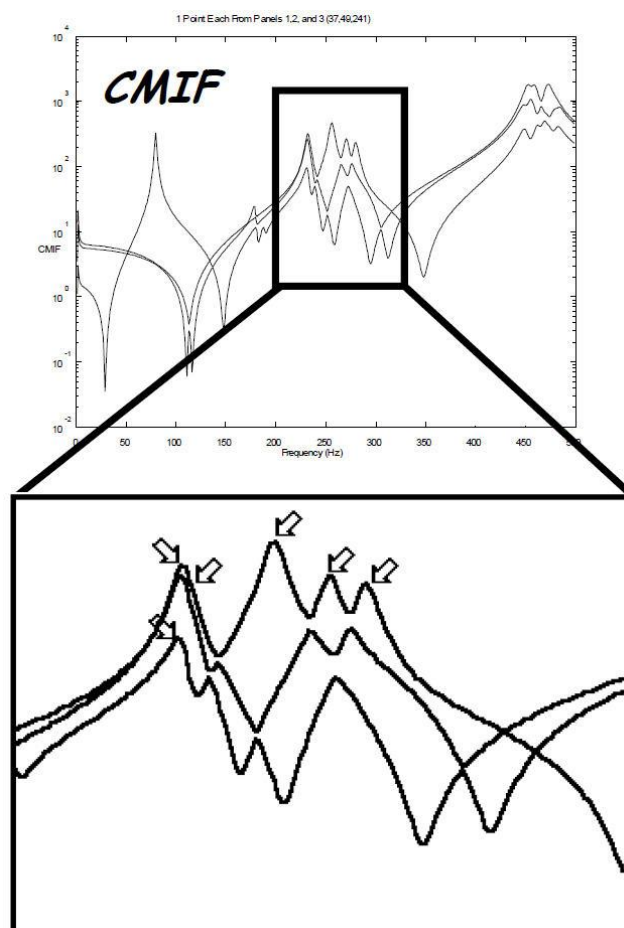


图 3 多模态的 CMIF

因此，我希望这些解释能消除你关于 CMIF、曲线解释和为什么存在交叉频率的迷惑。因为某些原因，我好像总是没有选择正确的马匹，无论我用何种方式跟踪它们。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



如果试验与分析模型频率相近, 那么模型是相关的吗? 真的必须考察振型吗?  
这非常重要, 需要讨论。

这是另一个经常让人们感到困惑的领域。多数时候, 人们要开发有限元模型, 并且希望开发出来的模型是合适的。经常, 进行实验模态测试的唯一目的是为了检验有限元模型的准确性。

开发出来的有限元模型有许多假设, 涉及到许多方面的问题:

- 怎样建立结构模型;
- 使用的材料属性是多少;
- 连接和接触是怎样建模的;
- .....这样的清单举不胜举。

这是因为有限元模型是一种近似, 它是一种建模工具。我们用它去确保特定应用的设计是合理的。模型包含许许多多的近似, 可能这些近似对大多数设计是合理的。幸运的是, 在设计中, 我们建立了安全系数、应力极限和其他标准来弥补模型中我们不知道的或不理解的东西。

许多时候, 有限元模型中会应用“罚因子”或“压倒性因子”, 这是因为我们不能确保模型中使用的材料属性是正确的。因为制造过程中或者制造技术可能会对结构强加某种载荷, 以至于降低了结构的常规属性等。

有限元模型是一种近似。我们使用有限元模型进行仿真计算, 以便在我们设计的结构中建立“舒适因素”, 增强我们对设计的信心。但结果是我们建立的有限元模型无论如何也不完美。希望模型是我们试图得到合理动力学特性的系统的合理近似, 但是.....经常在开发模型过程中忘记近似。

比如, 每个人建立的模型都非常复杂, 有时复杂程度是关注的焦点, 这种焦点可能受到了他人的指示。但有些时候简单的问题, 比如杨氏模量和材料密度, 可能是误差源, 而这些经常被人们忽视。很多时候, 没有人会称重测试结构, 以确认有限元模型的重量是否与实际结构重量相同。杨氏模量总是使用众所周知的值, 却没有考虑是否发生了变化, 应该怎么去检查它。

经常 CAD 模型会直接用作生成有限元模型的几何, 却没有考虑实际的几何, 可能 CAD 模型改变了实际的频率和振型。一个非常重要的例子是有限元模型中平板的平整度。有限元模型可能是按平面来建模的, 但实际上平面存在弯曲, 这将对整个频率预测有强烈的影响。图 1 给出了一些结果, 这些模型开始按平面来进行建模的, 但后来考虑了实际存在的弯曲, 从结果上看, 存在的弯曲变化对频率和振型确定起到了非常重要的影响。

在这个例子中, 有限元模型的频率跟测试得到的大多数频率都匹配上了, 但是模态振型一点也不相关, 因此频率匹配并不意味着有限元模态就正确了。

一个总会引起问题的特别难点就是当实验模态测试使用夹紧边界或者固定边界时。有限元模型很容易预测夹紧边界或者固定边界, 但实验模态测试却很难实现这一点, 但人们总

试图这样去做测试。

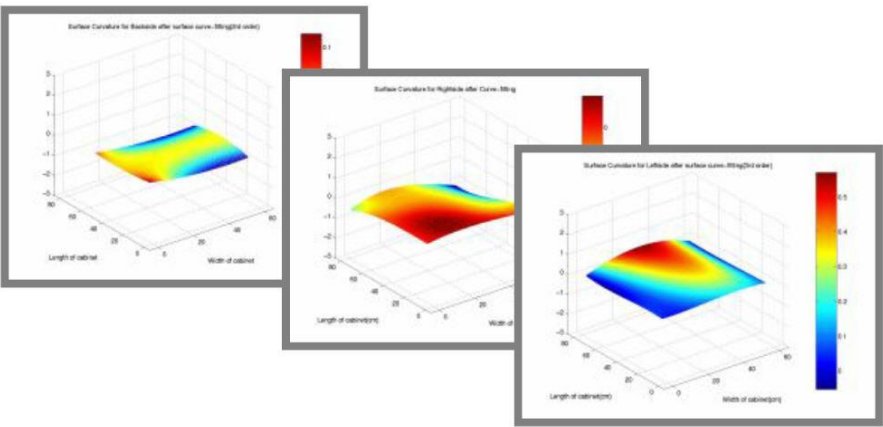


图 1 “假设的”平坦的平面的扭曲几何结果

曾经开发了一个带新纤维的复合材料平板模型，该复合材料平板模型的动力学特征受到了质疑。对这个平板进行测试，设置了一个固定装置试图实现固定边界条件，虽然很清楚这个边界条件是很难实现的。不幸的是，分析团队使每个人都坚信固定装置是完全胜任的。他们十分有把握的声称固定装置是“刚性的”、“刚度足够的”、“完全能胜任模拟测试的固定边界条件”。

现在唯一要说的就是“结构是什么，就能测到什么”，不管测量得到什么结果都将确定测试设置的真实性。测量得到复合材料平板的前几阶模态，并与有限元模型进行相关性研究。然而，原始有限元模型的纤维特性不清楚，测试的目的是为了帮助确定纤维的特性。当然，第一次的相关性结果表明，测试与有限元模型之间存在显著的差异。这是可预料的，主要是因为纤维特性是未知的。频率差异很大，但是振型相关性可以认为是合理的，如表 1 所示。在这作为参考，给出了分析模型与测试的前三阶模态振型对（二者重叠），如图 2 所示。

表 1 复合材料平板的有限元模型与测试数据的相关性

	FEA (Hz)	EMA (Hz)	误差 (%)	MAC (%)
1	81.3	117.4	30.8	99.5
2	165.7	213.9	22.5	89.9
3	165.7	232.8	28.8	80.6

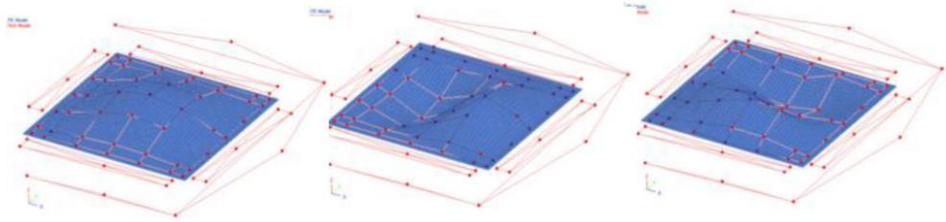


图 2 第一次的分析模型与测试的前三阶模态振型对

显然，有限元模型中一些纤维的特性没有真实地描述复合材料中分布的纤维的刚度。因此，对纤维特性作了小幅调整之后，限元模型相应的结果得到很大的改善。确定的模型频率和改善后的结果如表 2 所示。

表 2 “调整后的”复合材料平板的有限元模型与测试数据的相关性

	FEA (Hz)	EMA (Hz)	误差 (%)
1	113.7	117.4	3.1
2	233.7	213.9	9.2
3	233.7	232.8	0.4

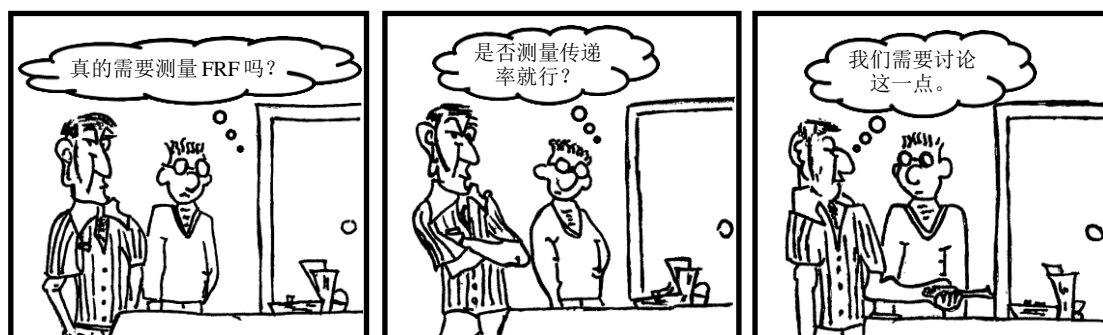
但是如果你观察表 2，你将会注意到 MAC 值没给出。由于时间和预算限制，调整后的模型没有再进行额外相关性研究。每个人都觉得因为频率比较得到了很大的改善，因而没有必要再进一步验证模型，频率接近就意味着“故事结束”。

但是一段时间之后又进行了一些相关性验证，发现振型相关性明显下降，跟原始的相关性相比，2 阶和 3 阶模态的 MAC 值大大低于之前的结果。频率似乎很接近，因而每个人都乐意使用调整后的模型的校正后的材料属性。但结果是边界条件产生了显著的影响，这些边界就是所谓的夹紧边界或者固定边界。有限元模型的频率的确非常接近测试频率，但是模型调整后的纤维参数明显对前三阶模态振型有重大影响，但是模态振型检查却从来没有作为调整后的模型检查的一部分。事实上，固定装置的边界条件并不如分析人员期望的那样刚，它对模态振型相关性有很大的影响。

因此，原则是相关性显然需要比较频率和振型。如果只考虑频率，那么调整后的模型（可能失真）差不多实现了“频率匹配”。但关键的重点是评估振型应作为对调整后的模型的相关性处理的一部分，以进一步证实模型与测试数据的相关性。

还有很多例子可以证实这一点，总是推荐有限元模型与测试数据之间的相关性验证应包括频率比较和振型比较。MAC 是振型比较的第一步，但对于验证模型的有效性，正交性检查也是需要的。（有关 MAC 作为向量相关性检查工具将在后续文章中介绍。）如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





真的需要测量 FRF 吗？是否测量传递率就行？  
我们需要讨论这一点。

许多时候在一些不同的情况下，测量的就是传递率。这可能是基于这样的事实，在大型振动台上对产品进行可靠性测试，测试对象安装在大型振动台上，“测试器件”上所有的加速度计测量的数据是相对于输入到被测对象上的基础加速度。

或者可能是对工作状态的设备进行测量，输入力无法测量，只能使用加速度计测量结构的响应。这类测试很常见，如飞行试验、车辆路试、悬架试验或者其他类似试验。这只有响应数据是可用的，但这有一些轻微的差异，需要我们注意。当我们使用所有这些相同的名语术语时，我们需要着重注意，有时我发现同一个词在不同的行业代表不同的意义，因此，检查这些名词术语的定义显得十分重要了。

让我们进行一些简单的定义，用于解释我们可能进行的测量中的一些差异。如果我们有如下的定义：

$x(t)$ -系统的时域输入信号	$y(t)$ -系统的时域输出信号
$S_x(f)$ - $x(t)$ 的线性傅立叶频谱	$S_y(f)$ - $y(t)$ 的线性傅立叶频谱
$H(f)$ -系统传递函数	$H(t)$ -系统脉冲响应函数

图 1 给出了系统输入-输出的线性谱示意图。

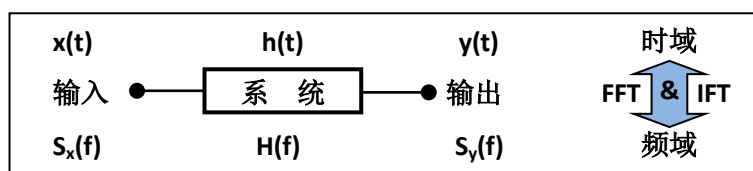


图 1 线性频谱

如果我们进行一些额外的定义：

$R_{xx}(t)$ -输入信号 $x(t)$ 的自相关函数	$R_{yy}(t)$ -输出信号 $y(t)$ 的自相关函数
$R_{yx}(t)$ -输出信号 $y(t)$ 和输入信号 $x(t)$ 的互相关函数	
$G_{xx}(f)$ - $x(t)$ 的自功率谱	$G_{xx}(f) = S_x(f) \cdot S_x^*(f)$
$G_{yy}(f)$ - $y(t)$ 的自功率谱	$G_{yy}(f) = S_y(f) \cdot S_y^*(f)$
$G_{yx}(f)$ - $y(t)$ 和 $x(t)$ 的互功率谱	$G_{yx}(f) = S_y(f) \cdot S_x^*(f)$

图 2 给出了系统输入-输出的功率谱示意图。

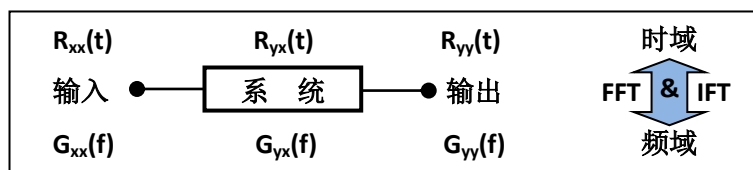


图 2 功率谱

现在我们已经有了这些公式的定义，让我们确定一些我们经常要进行的测量，并且理解怎样使用他们去计算 **FRF** 和传递率。首先要注意的是线性谱是复值函数，它们有幅值和相位，因此， $S_x$  和  $S_y$  都是复数形式的线性谱。但是，它们对应的功率谱， $G_{xx}$  和  $G_{yy}$  不是复数，它们是实数，只有幅值部分。这是非常重要的，因这它们没有相位信息。但注意到互功率谱， $G_{yx}$  是复值函数，它有幅值和相位。

让我们继续确定 **FRF** 和传递率。**FRF** 是互功率谱除以输入的自功率谱，而传递率是输出谱除以输入谱，他们定义如下：

$$H = \frac{S_y \cdot S_x^*}{S_x \cdot S_x^*} = \frac{G_{yx}}{G_{xx}} \quad TR = \frac{S_y \cdot S_y^*}{S_x \cdot S_x^*} = \frac{G_{yy}}{G_{xx}}$$

虽然我们通常说两者都是输出除以输入，但它们有很大的不同，**FRF** 是复值函数，包含幅值和相位信息，而传递率 **TR** 仅仅是幅值之比，这就表明了很大的不同，因为 **TR** 缺少相位信息。但这还有一个重要的差异在于，通常测量 **FRF** 是一个参考（加速度、速度或位移）对测量力之比，而传递率通常不测量力。当测量的数据用于为模型验证开发校准模型、结构动力学修改、系统模型开发和强迫响应研究时，这就显得十分重要了，因为校准模型是需要测量力的。

到目前，我们已经给出了所有的定义，让我们考虑一些 **FRF** 和 **TR** 测量以表明它们之间的几个不同之处。一根自由-自由梁将用于这些典型的测量。第一次测量使用力锤和加速度计获得一个驱动点 **FRF**。图 3 给出了这个驱动点测量的对数幅值和相位，注意到函数是复值函数。图 4 给出了一个跨点 **FRF** 的对数幅值和相位，跨点位置是梁的一端和另一端，这个测量也是复数值。

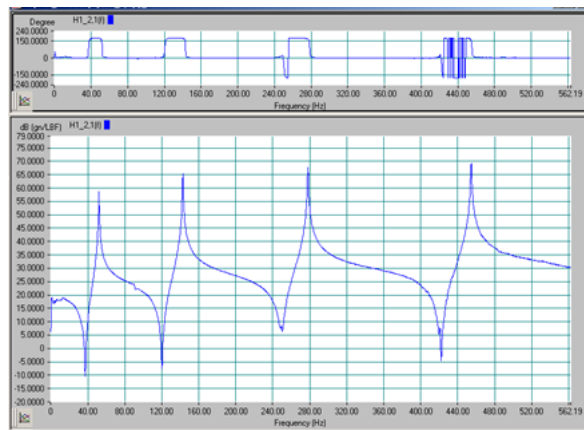


图 3 梁的驱动点 FRF

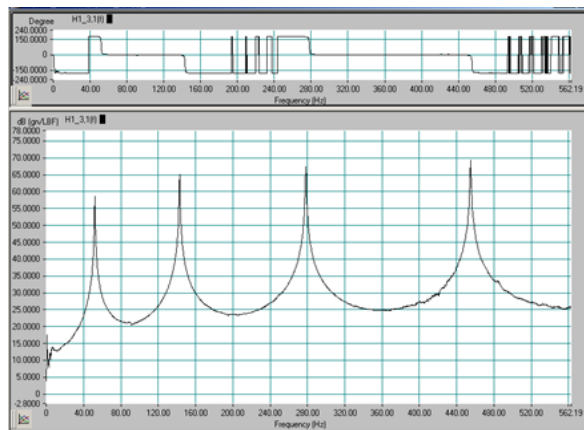


图 4 梁的跨点的 FRF

图 5 给出了驱动点处的加速度的自功率谱，图 6 给出了跨点处的加速度的自功率谱。

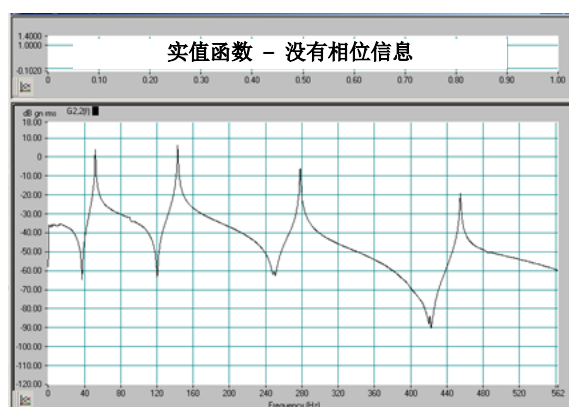


图 5 驱动点处的自功率谱

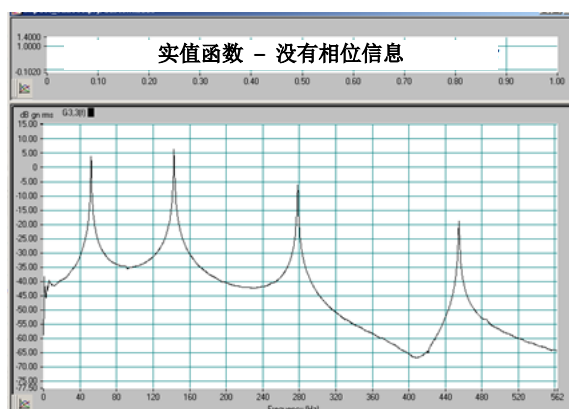


图 6 跨点位置的自功率谱

与图 3 和图 4 显示的 FRF 相比较，两类谱有一些相似的特征。但一个重要的信息是自功率谱缺少相位信息。功率谱是实值函数，没有任何相位信息。因此，当彼此之间是幅值之比时，从测量函数中是不能得到任何相位信息的。

为了获得任何方向信息，复数形式的测量是需要的，这时才包含相位信息。但不要误解我，因为传递率在许多情况下是非常有用的，没有其他测量函数可以代替它。如果我们想理解结构的模态振型，那么我们必须确保具有一些必要的关键信息，如相位信息。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



如果我们移动力锤进行测试, 并锤击了许多点, 有可能会丢失模态吗?

好, 你需要仔细考虑加速度计的放置位置。

你咨询这个问题, 我很高兴, 因为当进行模态测试时, 这是个非常重要的考虑事项。让我们来讨论一些有关你问的问题的事情。

移动力锤, 固定加速度计是当今锤击法模态试验常用的方式。锤击法的另一种方式是保持锤击点固定不动, 移动加速度计。因为互易性, 这两种方式进行锤击法模态测试都是可接受的, 从理论角度上讲这没有什么差异。事实上, 如果你移动力锤, 那么你将得到的是 **FRF** 矩阵的一行; 如果你移动响应传感器, 那么你将得到 **FRF** 矩阵的一列, 测量示意如图 1 所示, 同时图中还给出了互易性的频响函数。

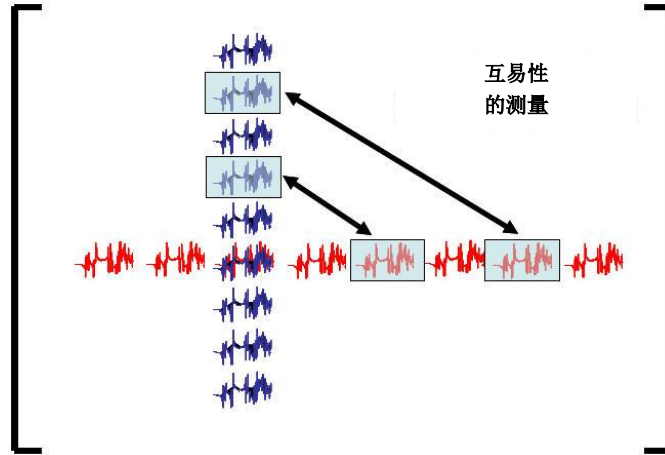


图 1 移动力锤（红色行）和移动响应传感器（蓝色列）的 **FRF** 矩阵

进行任何一次模态试验, 你都必须认真仔细考虑, 避免参考点位于模态节点上, 这是最重要的考虑事项。为了理解这一点, 几个描述 **FRF** 的基本方程有必要给出。单个 **FRF** “*ij*” 可写成留数之和

$$h(s)_{ij} \Big|_{s=j\omega} = h_{ij}(j\omega) = \sum_{k=1}^m \left( \frac{a_{ijk}}{(j\omega - p_k)} + \frac{a_{ijk}^*}{(j\omega - p_k^*)} \right)$$

但这个留数形式的方程, 不那么容易理解留数的含义。但是如果我将留数用模态振型表示, 此时方程为

$$h(s)_{ij} \Big|_{s=j\omega} = h_{ij}(j\omega) = \sum_{k=1}^m \left( \frac{q_k u_{ik} u_{jk}}{(j\omega - p_k)} + \frac{q_k^* u_{ik}^* u_{jk}^*}{(j\omega - p_k^*)} \right)$$

这个方程相应的 **FRF** 看起来像图 2 中的公式, 在图 2 中给出了 **FRF** 公式中的两项（蓝色和红色标注是为了表明单阶模态对 **FRF** 之和的贡献）。图 2 中, 上述方程中展开成了前两阶模态之和, 以表明每阶模态对总的 **FRF** 的贡献。要认识到的重点是 **FRF** 是由每阶模态之

和组成的。

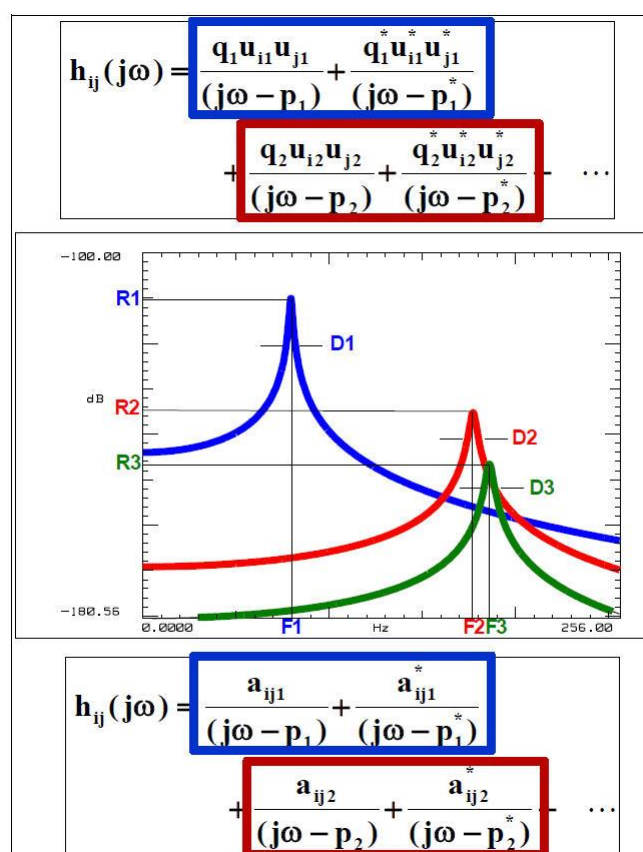


图 2 FRF 总和

当我们用模态振型写出这个方程时，结构的模态振型对于特定  $ij$  项的 FRF 幅值有强烈的影响，这一点就变得非常清晰了。留数本质上由振型缩放系数， $q$ ，和**响应输出位置的模态振型值**乘以**输入激励位置的模态振型值**。这表示，如果输出位置或者输入位置的模态振型值为 0（也就是位于模态节点上），那么这阶模态就没有幅值，这一点就变得非常清晰了。

因此，我们意识到，任何时候我们的测量位于模态节点上，不管是激励位置还是响应位置，那么那阶模态的 FRF 将没有明显的幅值。我需要指出的是，如果参考点位置非常接近模态节点，那么这阶模态的 FRF 值将非常小。实际上，图 2 中绿色表示的第 3 阶模态就恰好是这样的情况。相比较第 1, 2 阶模态而言，它的 FRF 幅值很小，因为它的输入和/或输出位置的模态振型值远小于 1, 2 阶的模态振型值，这就是为什么它的幅值那么小的原因。

关于你之前咨询的问题，重要的是参考点的位置，而不管是固定力锤作为参考点还是固定加速度传感器作为参考点。如果参考点位于模态的节点上，那么那阶模态的 FRF 将没有明显的幅值。

为了进行一次高质量的模态测试，我们需要知道所有我们感兴趣的模态的振型，以便能选择一个合理的参考点。

但很多时候，结构很复杂，或者结构的模态具有明显的方向特性，那么从一个参考点能观测到所有模态是不可能的，因而选择参考点也就不那么容易了。这就是为什么很多时候我们需要选择几个参考点。这样我们才有可能从不同的参考点观测到所有模态。

经常，我们使用 3 个加速度计，当我们有 4 通道采集系统（或者 7 个加速度传感器，如果我们有 8 通道采集系统）去进行一次移动力锤的模态试验时，会在结构上不同位置布置固定的加速度传感器作为参考点。这样，从所有不同的参考点，能观测到所有模态的可能性就更大。



希望我们能从所有的参考点位置找出 3 个（或者 7 个）位置作为参考点，这些位置不是模态节点。事实上，你可能会认为几乎不太可能选择太多的参考点，并且它们同时位于一阶模态的节点上也不太可能。

非常幸运，我有这么一个例子。一次锤击法模态测试，选择了 9 个参考点，移动力锤。你的最初想法是 9 个参考点，怎么可能还会丢失模态。然而，你不知道的是，所有 9 个参考点刚好全部位于一阶模态的节点上。图 3 给出了这样一次难以置信的测试，9 个参考点，还是丢失了一阶模态。

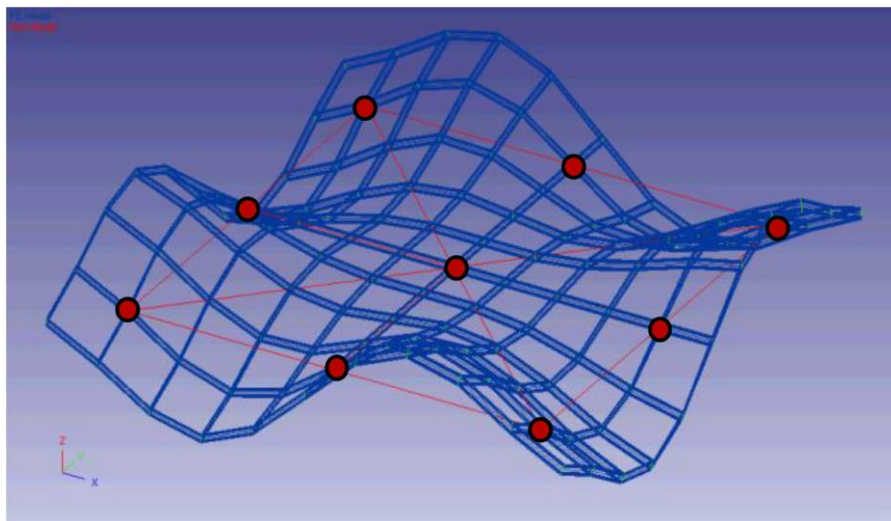


图 3 平板 9 个参考点丢失的模态

我希望这些能帮助解释当模态测试确定参考点时，你必须要非常小心。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





现在我有另外一个问题，如果锤击一个节点，那么其它点是不是没有响应？  
这似乎不正确。好，让我们进一步讨论。

上次我们已经讨论了移动力锤进行锤击法模态试验是非常常见的测试方法，但是你需要非常小心，不要将参考加速度计布置在模态节点上。我们也讨论了不管锤击多少个测点，如果参考传感器位于模态节点上，那么那阶模态我们将观测不到。

回答那个问题时，我同样也表明，对于固定力锤，而移动加速度传感器进行测试时，同样参考点不能位于节点上。你仍然需要确保固定在参考点位置的力锤激励不能位于模态节点上，否则你将看不到来自那阶模态的任何响应。

在我们完成讨论之后，你似乎会不舒服，这是基于这样的事实：你可能会锤击结构的节点位置，而结构在那个位置将不运动，这似乎违反你的直觉。因此，让我给出一些例子，使你真正明白这种情况。

我将使用一根自由-自由梁和一块简单平板，锤击一些额外的测点使你真正明白理解。首先，让我们回想一下上次写出的 **FRF** 方程，它可以用留数或模态振型来表示。但用留数形式，不是那么直观，所以我更喜欢使用模态振型来表示，因为用它你可以清楚地看到模态振型对每阶模态的 **FRF** 峰值的影响。

$$h(s)_{ij} \Big|_{s=j\omega} = h_{ij}(j\omega) = \sum_{k=1}^m \left( \frac{q_k u_{ik} u_{jk}}{(j\omega - p_k)} + \frac{q_k^* u_{ik}^* u_{jk}^*}{(j\omega - p_k^*)} \right)$$

从这个方程可以清楚地看出 **FRF** 的幅值受输出响应位置的模态振型值乘以输入激励位置模态振型值的控制。

因此，现在让我们来考虑一根自由-自由梁。沿着长度方向均匀布置 15 个测点，获得这些位置的 **FRF** 测量，然而用瀑布图的形式绘出这些 **FRF**，以便能清楚地看出振型。为了看到振型，我们用 **FRF** 的虚部来绘制模态振型。我们可能还能想起，**FRF** 的虚部在固有频率处有峰值，而实部却为 0，这样的情况成立只适用于位移和加速度测量。**FRF** 测量是在宽频带范围内获得的，但我只关注自由梁的前两阶模态。

图 1（蓝色）给出了 45Hz 附近梁的第 1 阶模态所有 15 个测点 **FRF** 的虚部的瀑布图。图 2（红色）给出了相同的绘图，但是在 140Hz 附近的梁的第 2 阶模态。两张图中梁上所有测点的 **FRF** 的虚部峰值都用圆圈圈住。图 1（蓝色）非常清晰地给出了梁的第 1 阶自由-自由弹性模态振型，图 2（红色）也非常清晰地给出了梁的第 2 阶自由-自由弹性模态振型。需要注意的重点是，随着你沿长度方向遍历梁，第 1 阶模态的 **FRF** 的虚部符号由正到负，然后再回到正，一些点位于 0 值位置。在这些位置，这阶模态没有响应。而不管这些位置是力锤激励位置还是加速度响应位置，它们都没响应。这阶模态在这些点的 **FRF** 值将为 0。

因此，模态节点是个特殊的位置，在这个位置这阶模态没有输出（或响应）。而不管你是加速度传感器还是力锤锤击，它都没有响应，因为模态振型值要么在输出响应位置，要么在输入激励位置为 0，因而这阶模态没有峰值幅值。但在这个位置还有一些响应，这些响

应来自结构其他阶模态，这个位置可能不是其他这些模态的节点。

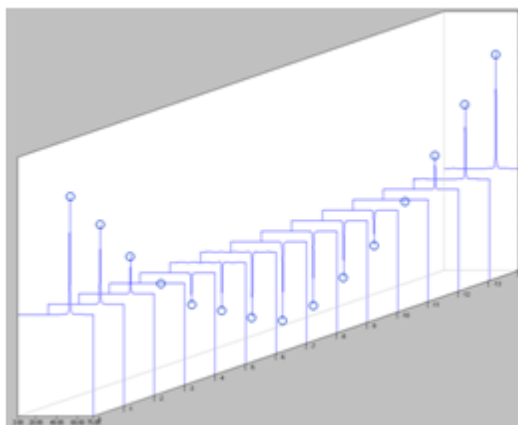


图1 第1阶模态的 FRF 虚部的瀑布图

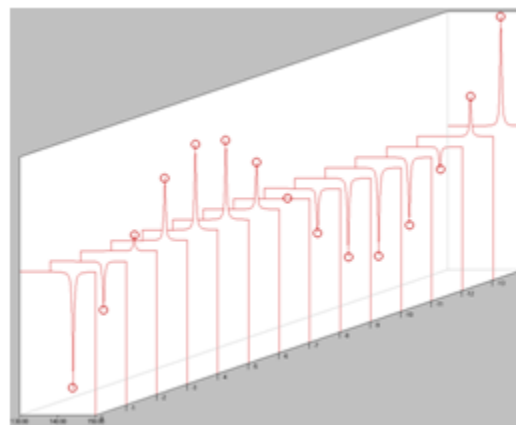


图2 第2阶模态的 FRF 虚部的瀑布图

因此在移动力锤的模态试验中，如果加速度传感器位于一阶模态节点上，不管锤击多少个测点，那么这阶模态对响应都将没有贡献。反之亦然，如果固定的激励位置位于一阶模态节点上，不管测量多少个加速度响应点，这阶模态对响应都将没有贡献。

让我们来延伸一下，从梁扩展到板，来看一下相同的影响。之前文章中使用的矩形平板，在这还使用这个例子。图3给出了沿平板周长上的6个FRF，第一个峰为平板的第一阶弯曲模态（蓝色），图4给出了相同的信息，但给出的是平板的第二阶模态（红色）。

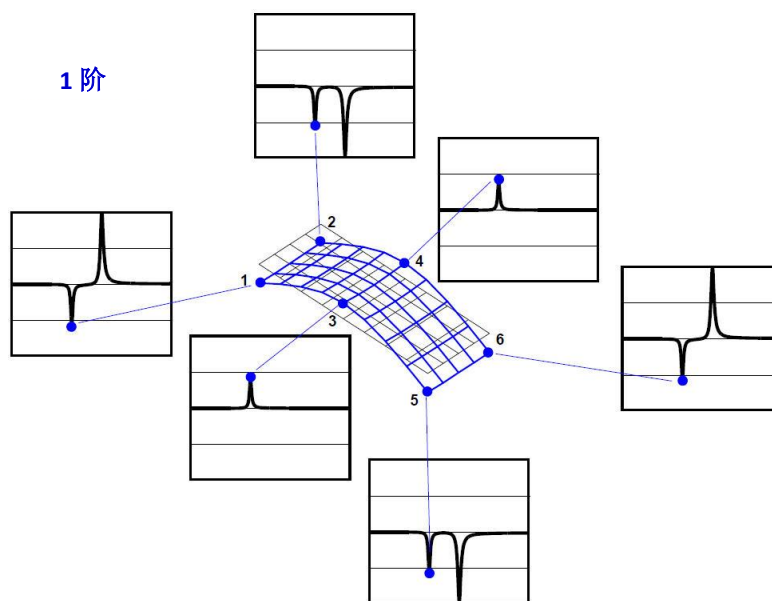


图3 平板弯曲模态

因此，观察图3和图4，可以得出与模态节点和锤击或者响应位置有关的相同结论。模态振型可以通过FRF虚部简单描绘。函数值有正有负，依赖于结构模态振型。在一些点必然是0值，这些点对应于这阶模态的节点，这意味着这阶模态下这个点是个0响应点。这阶模态的节点上响应为0，不管这个FRF测量是来自响应加速度位置还是力锤激励位置，但仅仅限于这阶模态。

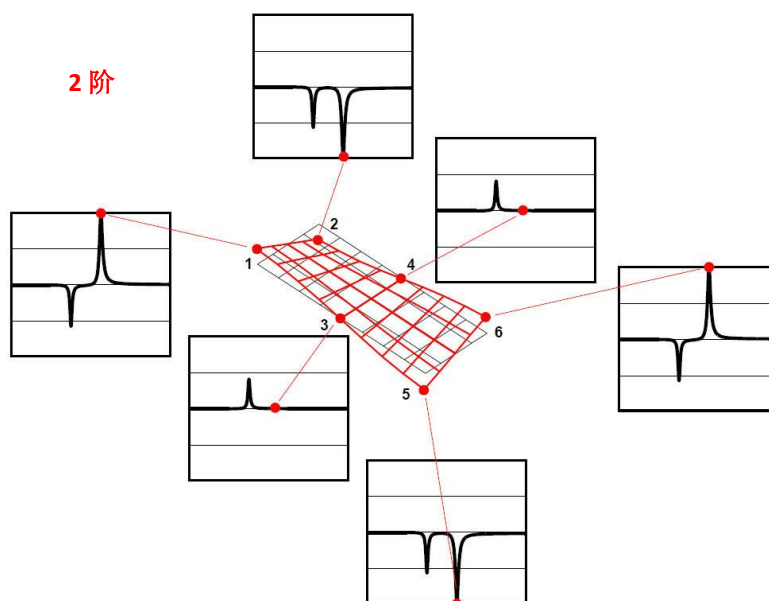


图 4 平板扭转曲模态

我希望这些有助于进一步解释你的问题，如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



有人告诉我他们锤击试验使用汉宁窗。这似乎不正确，会使数据失真吗？  
坐下来认真听，因此你不会犯这样的错误。

那么，我从何开始呢？首先，让我们试图明白这样的事情是怎样发生的。大多数时候，测试是在非常困难的情况下进行的，测试的条件至少可以说不是最优的。有很多这样的测量例子，我们总是希望获得的频响函数曲线像书本上那样漂亮，但事实却不是。

有许多这样的情况，系统处于嘈杂的环境、或者测量传感器不是最合适的、或者激励的能量不够不能激起可供测量的响应等等。而这些状况恰好是我们在测量过程中所要面临的一些问题。并且请不要忘记可能存在的非线性（我们的死敌）和复杂的阻尼机制（我们死敌的好朋友）这些使得测量状况更复杂。

因为这些类型的困难的存在，并且我们经常遭遇到它们，我们会认为我们所有的测量都会有这些困难存在。那么它将成为规律，而不是特例，我们会认为测量一直处于这样的状况中。但真的是这样的吗？所有的测量真的一直都是这样的低质量吗？还是仅仅因为我们已经变得自意了，认定测量就是这个样子了？

因此，让我们开始观察图 1 所示的测量。哦，我的天啦，那真的是一次非常糟糕的测量。初看起来，我知道我们大家都会同意这样的观点，这是从非线性系统获得的测量，系统带有复杂的阻尼机制，环境噪声非常大，用于获得这次测量的传感器不是最合适的等等。

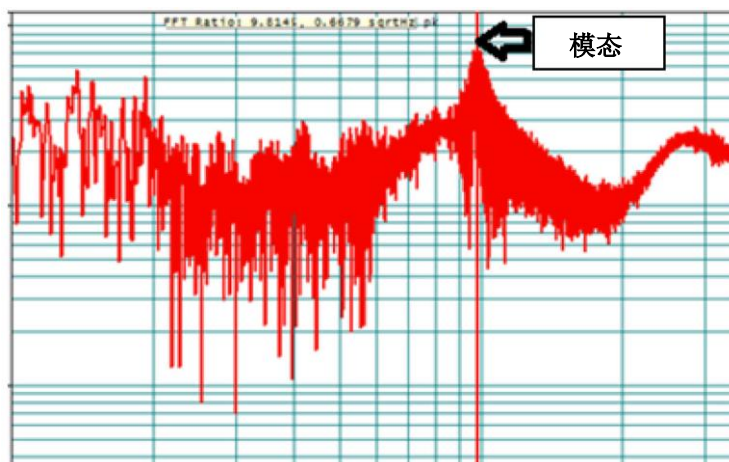


图 1 低质量测量实例

但真实问题是为什么这次测量会如此差？真的是从非线性系统中获得的吗？真的存在复杂的阻尼机制吗？环境噪声真的非常大吗？测量传感器真的不合适吗？或者所有的这些因素都是易于找到的借口，因为我们真的不知道原因或者已经习惯了这样差的测量，认定“测量就是这个样子”。

我真的不想对这次测量再作评价，你提及到测量是从一次脉冲激励得到的，并且对数据应用了汉宁窗，因为传统的做法都是这样的。因此，问题是，是否这真的是正确的测量方

法。

因此，让我们处理一个对一般结构进行的典型锤击测量。实际上这个结构是个复合材料加强筋的翼梁类结构，在进行其他一些测量之前进行锤击测试。因此，我们首先要进行的测量是一次数字化处理参数合理的测量，然而再进行一次应用汉宁窗的测量，用于展现两次测量的巨大差异。

第一次测量的频响函数（FRF）如图 2 所示，图中同时展示了相干、激励脉冲和时域响应。对于这次测量，真的不需要对输入或输出施加任何窗函数，因为这次测量完全是在采样周期内测量得到的，因而满足傅立叶变换的周期性要求。注意到 FRF 和相干非常好。显然如果要施加窗函数，那也只能是对响应施加指数窗。

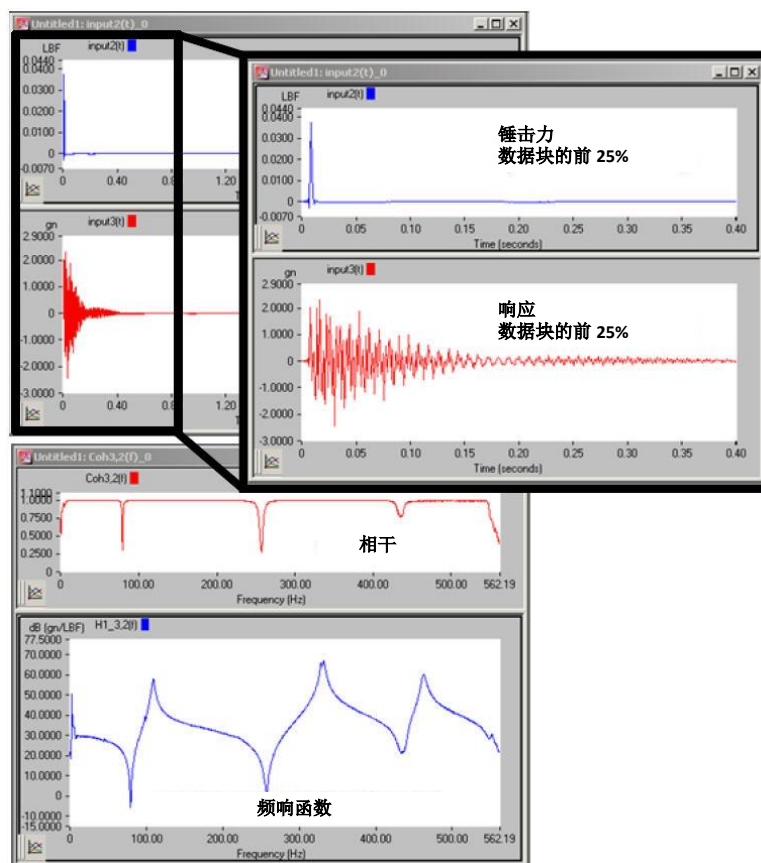


图 2 应用合理信号处理参数的锤击测量

接下来，进行一次应用汉宁窗的测量，如图 3 左侧所示。请你确保你已明白这不是这次测量的正确做法，而我只是想让你清楚地知道这样做导致测量有多糟糕。输入激励和时域响应是相同的，但是你能看到获得的 FRF 和相干却非常糟糕，糟糕还只是这次测量到底有多差的保守描述。

但让人迷惑的是时域信号不管怎么看都真的不糟糕。你必须认识到展示的信号是原始的测量数据，没有展示窗函数对数据的影响。不是真的想展示汉宁窗对时域信号的影响，但频域确定表明汉宁窗剧烈降低了 FRF 和相干的质量。

为了明白当应用汉宁窗时会发生什么，在图 3 右侧给出了时域的激励和响应信号，还显示了汉宁窗函数。对照进行的测量，汉宁窗展示了信号适度可见的部分。如果你仔细观察图 3，你会立即发现汉宁窗严重衰减了输入激励和输出响应的时域纪录的起始部分，窗函数的应用本质上将包含重要信息的瞬态响应计权至零，因此留下的测量本质上是系统的噪声部分。这样就变得很清楚了为什么图 3 中的 FRF 和相干如此差，这是因为测量数据本质上已沦为噪声了。

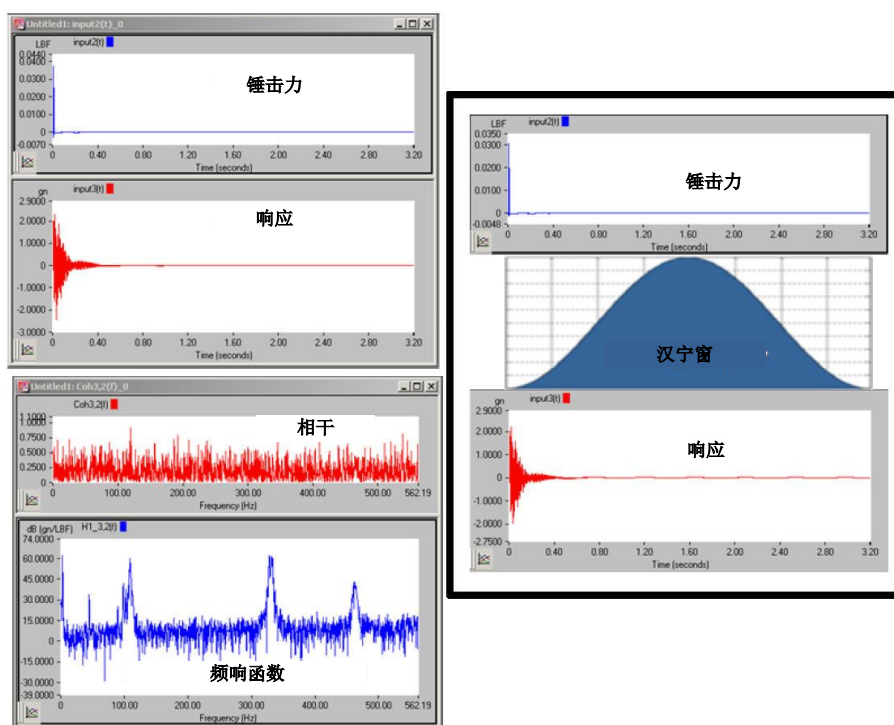


图3 应用完全不合适的信号处理参数的锤击测量

但是如果你不注意，或者受到错误地引导，从而认为典型的测量看起来就是这个样子，那么你将可能会认为“在这种情况下，这就是获得的最佳测量”。但真实情况是对信号进行处理时应用了不合适的信号处理参数，这样就使数据完全发生了失真。

我理解测量环境，由于之前提到的所有原因，会变得更困难，但是这不能给你权力去应用不合适的处理参数引起额外的误差，“因为你不认为它会产生差别”。在这展示的例子中，所有的失真都是由于不合适的处理参数造成的，这样做会使好的数据完全变成糟糕的测量，这在任何情况下都是不能接受的。

我希望这些能帮助你明白你提的问题。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





特征值求解告诉我们频率，但我们怎么得到模态振型？  
现在让我来解释这一点。

我认为首先我们必须要说的是特征值求解实际上是告诉了我们频率和模态振型。特征值求解的数学处理可采用一些不同的方法实现。这些方法又分为直接求解和间接求解。

对于规模较小的矩阵，则采用直接求解方法分解方程组，得到所有的特征值和特征向量。常用的直接求解方法有雅可比（Jacobi），吉文斯（Givens）和豪斯霍尔德（Householder）等。但当矩阵的规模更大时，如大型有限元模型，常使用一些间接方法，但这些间接方法只能得到一些低阶模态。这些间接方法如子空间迭代法（Subspace Iteration），同步向量迭代法（Simultaneous Vector Iteration）和兰索斯方法（Lanczos）等。

但是我实在不想使这篇文章变成数学课或去关注这些方法的细节。因此，让我们讨论特征值求解和我们试图在何时能得到频率和模态振型。我想去解释这一点，使你更加明白。

因此，让我们写出一般形式的特征值求解方程

$$[[K]-\lambda[M]]\{x\}=\{0\}$$

首先，我想说的是特征值可从矩阵的行列式中得到。这个行列式其实就是一个高阶多项式，多项式的根也就是特征值。这些根可数值上通过任何根求解算法获得，这些算法如正切方法（Secant Method）或者是牛顿-辛普森方法（Newton-Rapson Method）等众所周知的方法。

因此，特征方程和一个可能产生的典型多项式如图 1 所示。函数过零位置也就是多项式等于零时的根。

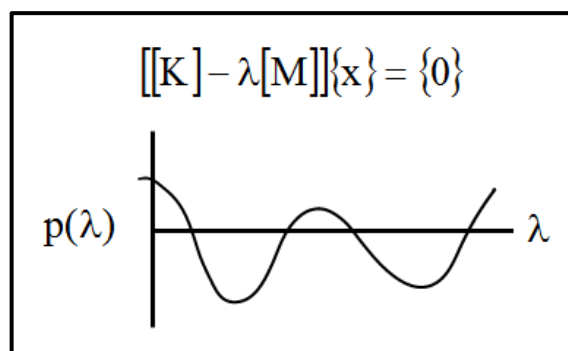


图 1 行列式的根的图形表示

既然已经给出了方程组的频率，那么下一步就是确定模态振型。如果你使用第一个特征值， $\lambda = \omega_1^2$ ，代入到特征方程，那么你就能求解得到向量  $\{x_1\}$ ，因为  $[M]$ ， $[K]$  和  $\omega_1^2$  是已知的。求解这个向量可直接使用一些分解模式，如克劳特-杜利特尔（Crout-Doolittle），乔里斯基（Cholesky），LDL 分解等众所周知的方法。

向量  $\{x_1\}$  实际上就是那个特定频率对应的模态振型，而正是使用这个频率去求解方程组，得到这个向量。图 2 展示了简单自由梁的第 1 阶自由-自由弹性模态，注意使用蓝色围住的特征值去确定系统的第 1 阶模态。如果进一步求解如图 2 所示方程，你将会发现弹性力等于惯性力。我们可以说这根梁在频率  $\omega_1^2$  处处于动态平衡状态。如果你从能量角度去观察这个系统，你将会明白为什么会存在节点，系统将围绕这些节点振荡，在这些节点处系统的振型有相等的正负部分，使得系统处于平衡状态。

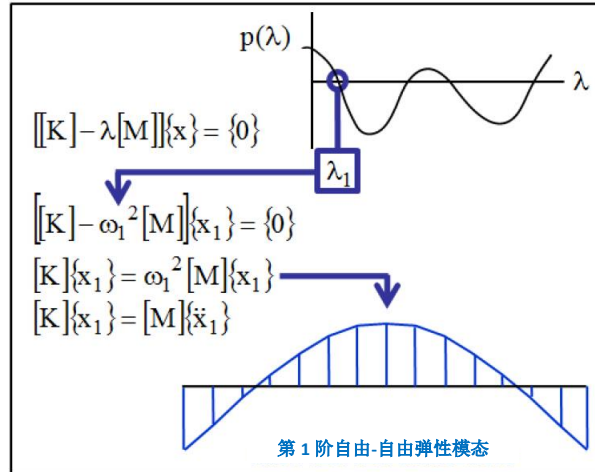


图 2 第 1 阶模态的特征值求解示意

当然，我们可以为第 2 阶频率做相同的事情。如果你现在考虑第 2 个特征值， $\lambda = \omega_2^2$ ，将它代入到特征方程，那么你就能求解得到向量  $\{x_2\}$ ，因为  $[M]$ ， $[K]$  和  $\omega_2^2$  是已知的。向量  $\{x_2\}$  实际上就是第 2 阶频率对应的模态振型。图 3 展示了这根梁的第 2 阶自由-自由弹性模态示意性求解过程。注意使用红色围住的特征值去确定系统的第 2 阶模态。如果再次进一步求解如图 3 所示方程，你将会发现弹性力等于惯性力。我们可以说这根梁在频率  $\omega_2^2$  处处于动态平衡状态。与第 1 阶模态相同的做法，我们将明白系统将围绕这些节点振荡，在这些节点处系统的振型有相等的正负部分，使得系统处于平衡状态。

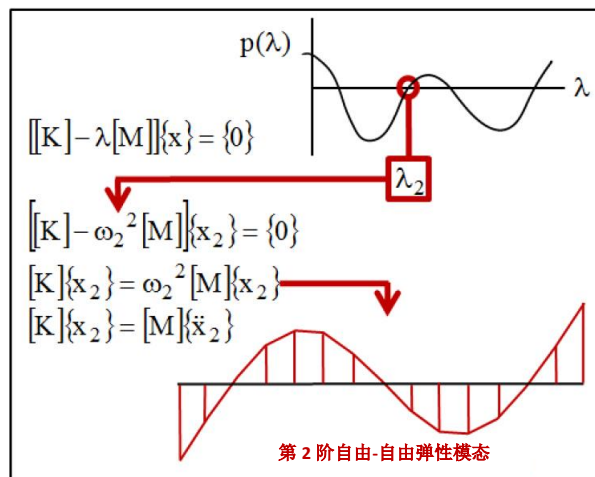


图 3 第 2 阶模态的特征值求解示意

我们然后继续求解所有感兴趣的模态。当然，我讲解的过程可能会采用不同的求解算法去分解这个矩阵，以获得最终的答案。但我讲解的方法将会使你更明白整个过程，即从系统方程中怎样求解频率和模态振型。

因此，重要的是要知道特征值求解是去获得所谓的特征对，也就是与特征方程相关的频率和向量。这个向量就是模态振型。

另一件要知道的事是模态振型之间是线性无关的，同时关于质量和刚度矩阵是正交的。这是特征值求解带来的副产品。这非常重要，常用于测量结果检验有限元模型中。我们执行某类型的正交性检查，通常称为伪正交性检查，去对比由特征值求解得到的向量与实验测量得到的向量之间的正交性。

我希望这些能帮助你明白之前提出的问题。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。

**译者注：**这篇文章所说的方法是指有限元求解方法，并非实验测量求解方法。



需要在所有位置安装三向加速度计吗？那可能需要更多的通道和更高的代价。  
让我们来讨论这个，并思考一下。

让我们来讨论这个问题，同时讨论一下与怎么在结构上布置测试设备有关的其他事项。首先，我想说的是在许许多多实际应用中三向加速度传感器是非常有用的。三向传感器作为一个非常紧凑的结构，仅从一个物理安装的传感器就可监测到三个方向的振动。我也经常使用它们，但是我想说的是，我并不是总是使用它们，在很多例子中，我是坚决不用三向加速度传感器的，下面我们来讨论一下原因。

首先，我们知道可以通过一个安装块，如立方体，可以将三个独立的单向加速度传感器“制作”成一个三向加速度传感器。当然，这样做不像使用一个三向加速度传感器那样美观，但这样不失为一种简单且经济的方式来实现三向测量。当然，这意味着你可以购买三个单向的加速度传感器，总价钱与一个三向加速度传感器相差不大。但是，这有一个明显的区别。

当我在待测结构上安装三向加速度传感器时，但我实际上只想测量一个方向，这样我将浪费了另外两个方向。如果有人想进行一些测量，在每个测量位置安装三个加速度传感器，依据你是否测量三个方向。如果你有三个单向的传感器，那么你不需要总是将它们“制作”成一个三向传感器。如果你只想测量一个方向，但是你没有单向的传感器，只有许多三向传感器，那么，你不得不在结构上安装这些三向传感器，这样听起来可能有些可笑。我曾经见过一些实验室购买的全是三向加速度传感器，当进行多个不同目的的测试时，在一次试验中所有的传感器都安装在结构上。

现在让我们讨论另一些事情，先从简单的自由-自由梁测试开始（你知道所有的“学术教育工作者”所有的测试都是测试梁结构）。如果我们想测量梁一个方向的横向弯曲模态，那么，我们可以如图 1 所示进行设置，沿梁的长度方向布置 15 个测量位置。

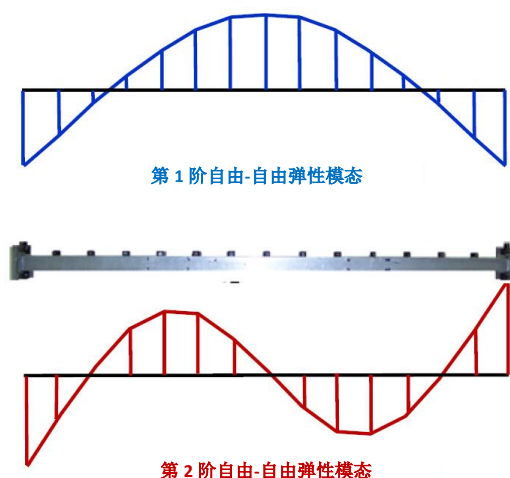


图 1 平面梁模态测试示意

如果我所有的传感器都是三向加速度传感器，那么我需要安装 45 个测量传感器，但实际上只需要其中的 15 个。当然，可能你会辩解说我可能需要测量平面梁其他方向的弯曲模态，因此，需要另外 15 个加速度传感器。但是如果我不关心轴向，那我仍然有 15 个测量传感器没有使用。

你可能还会说这是一个学术类问题，一些典型应用可能真的需要所有这些三向加速度传感器。我同意你的观点，但让我展示一些情况，从这你可能要重新考虑这一点了。

最近，我做了相当多的大型风机叶片模态测试，主要关心两个方向的弯曲模态，分别称为挥舞模态和摆振模态，叶片根部铆接。（实际上是一根“非常巨大”的悬臂梁。）图 2 为 9 米长的风机叶片测点布置示意图，同时还有加速度传感器安装照片。注意到只测量了 2 个方向（x 和 y），因为对轴向不感兴趣。测试设备为便携式 8 通道采集系统，7 个通道连接加速度传感器，1 个通道连接力锤。第 1 批测量时，7 个测点的加速度传感器全部布置在 x 方向。第 2 批测量时，将上一批次的 7 个测点更换到 y 向。最终加速度传感器移到到所有感兴趣的测点上进行测量。使用单向加速度传感器的一个好处就是在更换方向和移动传感器的过程中，所有的导线始终连接着传感器和数据采集仪。这样，不用担心导线互换导致传感器测量位置和方向错误。如果使用三向加速度传感器，那么导线交换的可能性非常大。

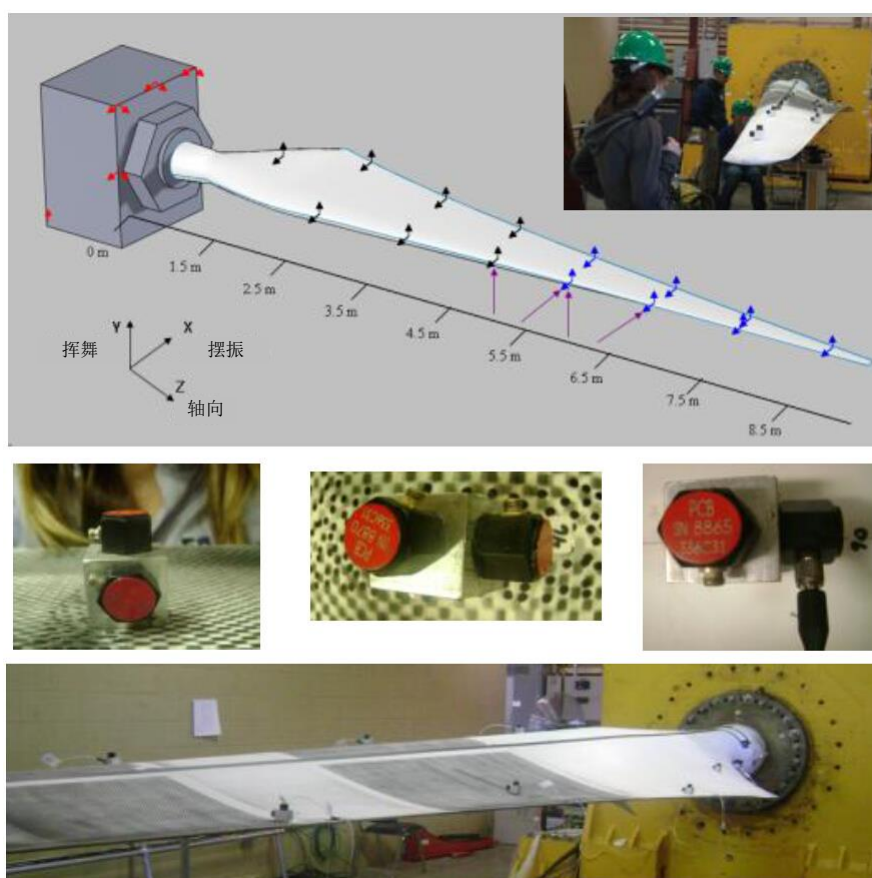


图 2 9 米长风机叶片测试

另一次测试的风机叶片长达 50 米。这次测试也只关心叶片的挥舞模态和摆振模态，但是一些人认为轴向也应该测量。图 3 展示了叶片测试、导线配置与与测试相关的模态振型。

相比较挥舞与摆振方向，轴向刚度非常大，同时位移也非常小。在本次测试中，我们实际上使用了三向加速度传感器，最终测量了三个方向，但幸运的是，许多人都认识到轴向测量的响应非常小。但还有一个非常重要的关心项，许多人从来没有考虑。



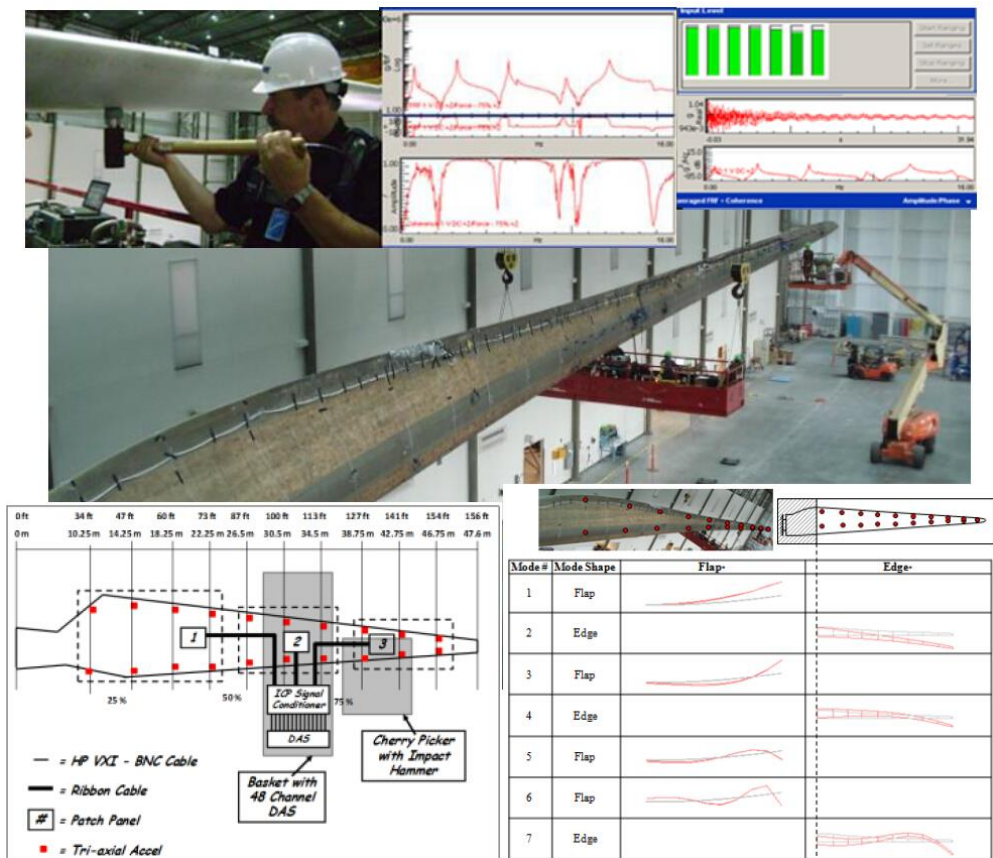


图 3 长风机叶片测试

挥舞和摆振方向的运动非常大，传感器的灵敏度为 100mV/g，非常适合这两个方向的响应测量。然而，轴向的响应非常小，如果要测量到该方向合适的响应，需要使用灵敏度为 1V/g 或者更高的传感器。问题是，一个三向加速度传感器三个方向的灵敏度名义上是相同的，因此，使用灵敏度为 100mV/g 的三向加速度传感器测量轴向将会非常糟糕，信噪比差，因而根本不能提供合适的测量。

对于最后一次测试场景，用非常明确的说明来结束这篇文章。也就是我更宁愿使用三个不同灵敏度的单向加速度传感器测量长风机叶片，不同的灵敏度适合测量不同量级的响应。对于这类要考虑所有方向的测试，三向加速度传感器不是明智的选择。

但是我要指出的是，本次测试我的确安装了三向加速度传感器，主要考虑的是，在叶片升起之前需要布置整个叶片的所有测量导线。整个测试过程中，传感器有一个方向始终没有用到。实际上，我们只测量了挥舞方向和摆振方向，没有连接任何测量位置轴向的导线。如果连接每个传感器的三个方向，那么我需要比实际使用的数据采集仪通道更多的数据采集设备。我使用了三向传感器只在“这个例子中”。

我希望这些有助于解释你提出的问题。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





频率测试时重力起作用吗？测试结构的方向有影响吗？  
这有一些事情需要讨论。

一些不同的方面与这有关，需要讨论。当进行模态测试时，一些不同的方面可能有影响，我们确实需要讨论这些方面。

通常从理论上讲，大多数情况下重力对频率和模态振型没有影响。这是因为我们所写出的系统运动方程是处于静平衡状态的，因此，重力没有影响（但稍后我将讨论现实情况，此时这个结论未必成立）。

让我们考虑所图 1 所示的简单梁结构。当我们建立这个梁的有限元模型时，如果我考虑结构的横截面方向相对重力方向如图 1 右上角和右下角所示时，此时重力对结构的频率没有任何影响。两种情况下计算出来的频率相同，因为不考虑重力，此时我们假设结构处于静平衡状态。此时，结构本质上没有因重力作用发生明显的变形（至少当我们建立有限元模型时，是这样假设的）。

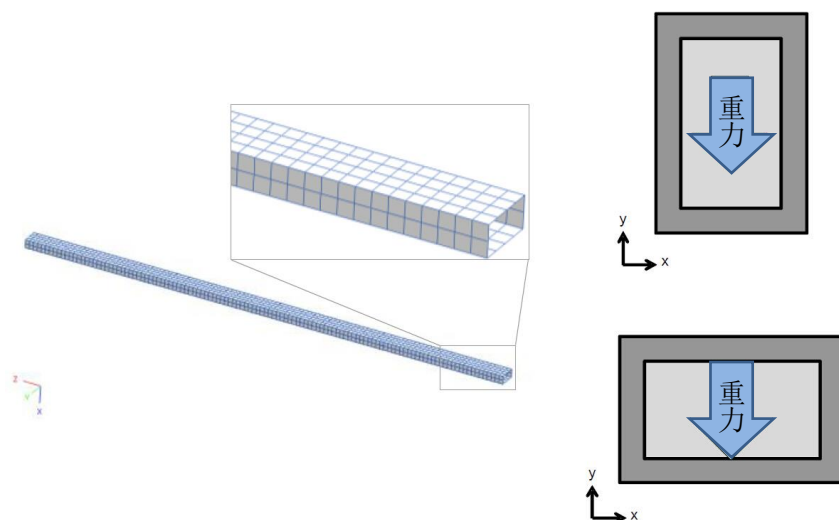


图 1 梁模态测试示意图

对于上一段中最后所说的状况，需要考虑一些额外的情况。图 2 显示了一些梁的不同状态，我们需要额外讨论这些不同状态的梁。讨论的第一种情况如图 2 中间所示的状态。此时假设横截面方向沿梁的中性轴方向，梁没有变形。在这种情况下，相对重力方向，梁的方向真的没有影响，测试的频率将不受梁的方向的影响。

现在，让我们考虑图 2 中顶部的梁。在这种情况下，梁受轴向载荷的作用而发生向上的弯曲变形。此状态对梁的刚度有影响。刚度增加。因为梁向上弯曲，这一点的确成立。拱形梁的刚度要大于平直梁的刚度。考虑任何跨度的梁，主梁总是有轻微的拱形状，这是因为拱形梁的刚度更大。因此，如果梁受到压迫的预载荷作用，那么将产生向上的弯曲变形，此时拱形状态下的梁的刚度稍微大于名义上没有变形的梁的刚度。

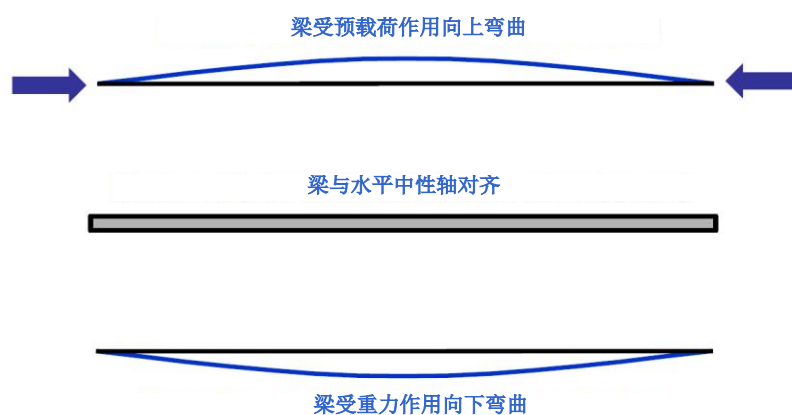


图 2 处于不同状态的梁

考虑图 2 中底部所示的梁，此时梁受重力载荷的影响而发生变形。显然受重力而发生变形将对刚度有影响，特别是对轻质结构，如风机叶片，影响更明显。如果将梁旋转 90 度，刚度更大的截面承受重力载荷，那么变形将变得更小，重力的影响也将最小。

因此，理论上讲，重力载荷不会产生任何影响，因为假设变形是很小的，重力影响不明显。但如果由于结构弹性特征而发生的静变形很显著，那么此时假设就不合理了。此时，梁的方向会产生显著的影响。

因此，这可能是变成一个新的关注点。对于大型风机叶片而言，结构非常柔韧，叶片横截面的方向（挥舞和摆振）将对叶片有效刚度产生显著的影响，因为叶片的方向与重力有关。

图 3 展示了两种配置的风机叶片，两者对与重力有关的叶片方向都敏感。叶片受与重力相关的横截面方向影响明显，导致固有频率受方向的影响。观察叶片，可以发现两个方向明显不同。相比刚度更大的摆振方向，挥舞方向（弱轴）更易受自重的影响。

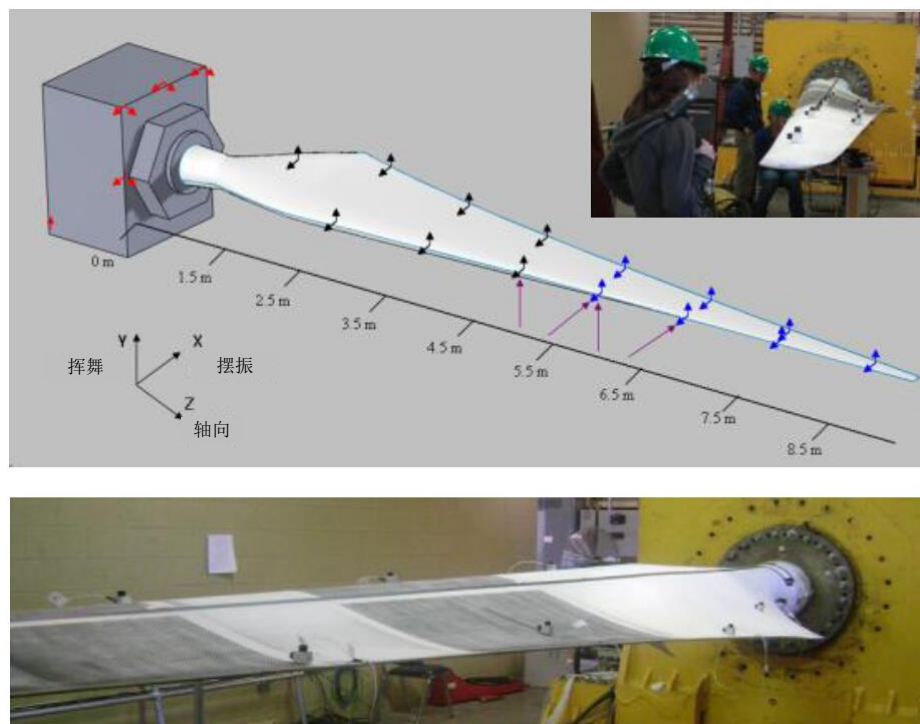


图 3 9 米长风机叶片测试

还有另一个因素经常被忽略。自重载荷会引起结构变形，但是自重变形可能产生一些显著的载荷作用在一些内部结构上，这些载荷可能会使桁架和加强型的内部结构发生大变形，

从而导致变形成另一种状态，此时明显不同于设计图纸上的名义尺寸。这些变形本质上引起内部加强结构的刚度明显不同于设计图纸上的名义值。这非常类似于图 2 中施加了预载荷的顶部梁结构，它的刚度明显大于名义值。

图 4 中所示的加强筋型翼面是个非常不错的例子。这个例子中横截面可能需要重点关注。图右边的草图展示了一种简单的翼型结构，左边机翼（蓝色）本质上没有因重力而发生变形，但是右边机翼（红色）却因重力有显著的变形。对于这个薄的，脆弱的面板结构（红色），自重或者结构载荷导致内部加强筋面板弯曲，这些载荷可能引起显著的变形，将导致几何尺寸不再与 CAD 图纸上的名义尺寸相同。当考虑重力载荷时，这些内部加强筋结构可能对测试结构的方向非常敏感。

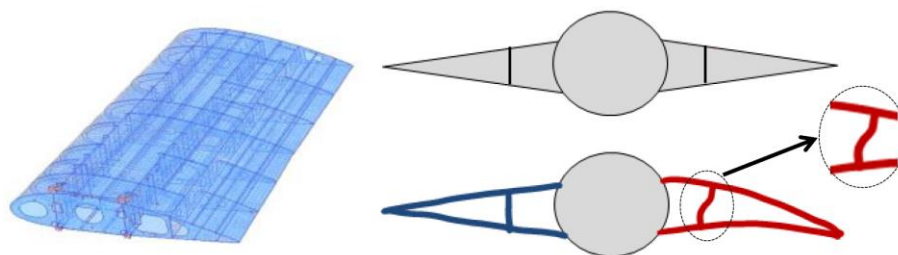
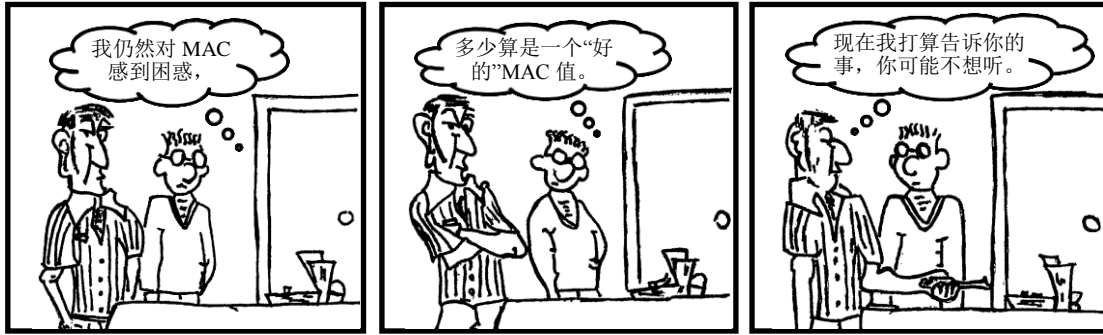


图 4 机翼的加强筋面板

因此，通常我们不考虑重力影响，除非这些影响会引起显著的变形，并且严重改变了定义有限元模型的几何形状。

我希望这些有助于说明你提出的问题。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。



我仍然对 MAC 感到困惑，多少算是一个“好的”MAC 值。  
现在我打算告诉你的事，可能你不想听。

我发现很多人很难明白和理解这个主题。很多人喜欢逃避现实“把头埋在地下”，希望问题就这么消失了。在这，我打算展示一些人们长时间很难接受的事情。但首先，让我从与相关性和正交性相关的名词开始，因为这两者之间有很大的不同，很多人都认为模态置信准则（MAC）与正交性检查相同，但事实上他们有着巨大的差异。

描述 MAC 和正交性的方程分别如下所示：

$$MAC_{ij} = \frac{\left[ \{a_i\}^T \{b_i\} \right]^2}{\left[ \{a_i\}^T \{a_i\} \right] \left[ \{b_i\}^T \{b_i\} \right]}$$

$$ORT_{ij} = \{u_i\}^T [M] \{v_i\}^T$$

首先要指出的是 MAC 仅仅是向量之间的点积，得到的标量值位于 0 和 1 之间。如果 MAC 值接近 0，那么我们可以说这两个向量之间相关性很小，如果 MAC 值接近 1，那么我说这两个向量非常相似。但是你注意到从没有使用正交来描述。用的词语仅是相似。

正交性是数学性质，源自于质量和刚度矩阵描述的系统特征值求解过程。特征值求解的副产品是“线性无关”的特征向量，这些向量“同时关于质量和刚度矩阵正交”。因此，正交性是特征值求解的保证。而 MAC 对于特征值求解却没有这样的保证。

正交性检查是一种更严格的检查，经常在航天航空和军工领域应用时，作为认证过程中强执执行的一部分。分析模型/有限元模型的模态振型经常与测试的实验模态向量作比较。主管部门强制要求相似向量的质量正交必须大于 90% 或 95%，不同向量之间的值不能超过 5% 到 10%。那是说质量正交矩阵的对角元素必须大于 90%，所有的非对角元素必须低于 10%。在这些行业，MAC 通常不作为模型的验证工具，因为正交性是更好的相关性验证工具。

其他行业怎么样呢。这些行业真的没有强制要求或主管部门，很多时候公司或行业都不会遵循这些“良好的做法”。MAC 源自于测试环境，测试工程师想确定测试的振型是否与下次的振型相似，或者原型是否与成品相似，或者……（等等许多不同的方面都能用到 MAC）。

那么他们为什么不用正交性检查呢？记得 MAC 源自于测试人员，返回到 30-40 年前，测试人员没有质量矩阵可用，只有少数分析工程师可以使用非常原始的有限元建模工具，再加上 MAC 容易计算。面对这个现实，他们没有质量矩阵可用，也不想因为更加困难的质量正交性检查而费心。因此，测试人员只想进行一些更为简单的比较。

但是任何事物都在“发展”，突然人们使用 MAC 去验证有限元模型的模态振型与测试振型的相关性。突然人们使用 MAC 去进行模型的相关性验证，并且使用一些从正交性检查中发展而来的相同的一般性准则。

但经常我听到人们说他们将接受相关向量的 MAC 值低于 90%，有时也接受低于 80%

的 MAC 值。因为“我们生活在现实世界中，真正的结构不像学术中那样理想”。我不太确定同意那种心态，因为 MAC 计算中并不包含质量矩阵。

我想展示两个实例，以表明完全不相似的模态之间的一些 MAC 值。第一个例子是对比自由-自由梁的摆动刚体模态和悬臂梁的第一阶弹性模态。图 1 显示这两个模态之间的 MAC 值有近 60% 的相似度。

这两个向量彼此完全不相干，但它们的 MAC 值却表明了 60% 的相关。这怎么可能发生呢。如果你看图 1 右下方，你将会发现悬臂梁从约束端到跨中的模态振型值非常小，因而它们对计算的 MAC 值贡献非常小。从跨中到自由端的模态振型值非常大，用肉眼就能看出它与自由-自由梁的摆动刚体模态非常相似。这就是 MAC 所指示的地方。但是我们知道这两个模态是完全不相似的。现在你可能会争辩说我无权去比较这些模态，但我这样做只是想说明 60% 的 MAC 值指示了什么，多么奇异呀!!!

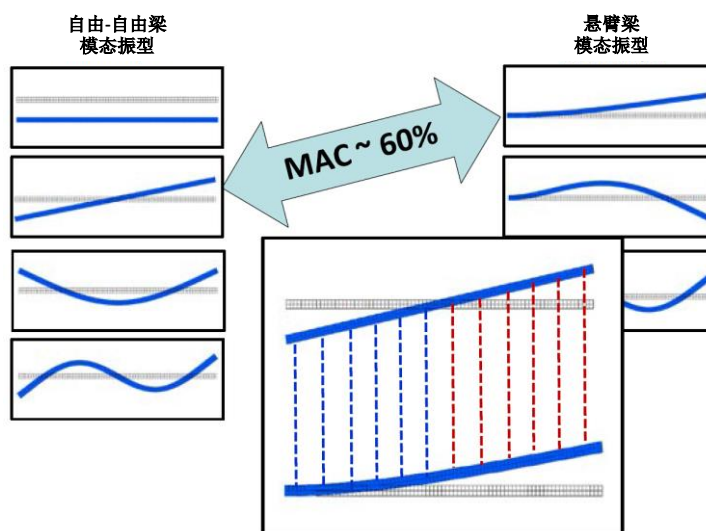


图 1 自由-自由梁（左）和悬臂梁（右）的模态振型

现在我们继续另一个两根悬臂梁的例子，一根梁的质量分布均匀，而另一根梁在跨中有额外的集中质量（集中质量重量为梁总重的 20%）。现在，如果考虑质量均匀分布的 1 阶和 2 阶模态，那么 MAC 值表明他们相关性很小，与预期相同。但当你比较带集中质量的悬臂梁的前 2 阶模态，MAC 值几乎达到了 80%。简直不敢相信。但如果你考虑图 2 中右上角

质量分布均匀的模态，并且与图 2 中右下角的模态进行比较，那么你会发现与第一个例子相同的问题。接近约束端的模态振型值对 MAC 值的贡献非常小，但朝自由端的模态 1 阶和 2 阶振型看起来非常相似。这也就是 MAC 所指示的地方。但我们知道这两阶模态彼此是正交的，但在这 MAC 完全失败了。然而，质量正交性清楚地确定了向量状态，因为正交性检查中包含了合适的质量分布。MAC 值却不能说明这个例子中的质量分布不均匀。

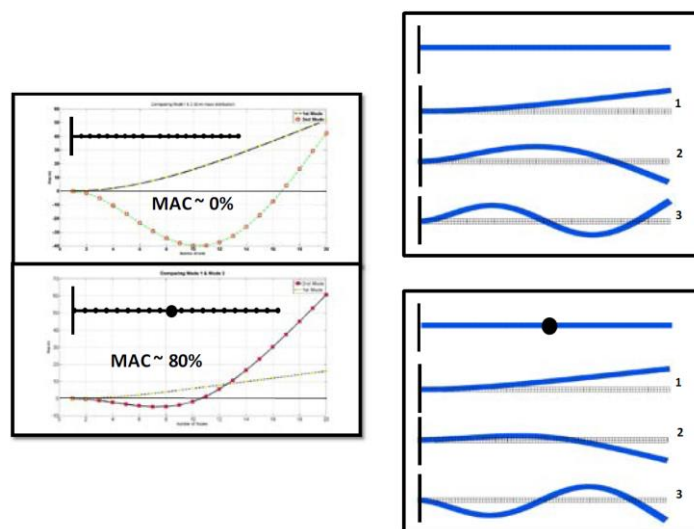


图 2 质量分布均匀和带集中质量的悬臂梁 1 阶和 2 阶模态

因此，我希望你能明白 MAC 值有欺骗性。MAC 值计算没有质量矩阵。这是它的最大优点也是最大缺点。现在我不会混淆了，我总是使用 MAC 去帮助挑选分析模型和测试的结果。当“相关的模态”的 MAC 值指示并不强烈时，我也会大为猜疑。

我希望这些能帮助说明你所提出的问题。我可能会在将来的文章中谈论 MAC 更多的方面。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。





实现自由-自由设置的最佳方式是什么，因为没有什么才是真正的自由-自由。  
好的，让我们讨论一些非常规的方式。

总是有很多人问我实现自由-自由设置正确的方式是什么。其实这并没有正确的方式，但确实有一些非常廉价的方式。

最常用的方式是使用橡皮绳（或者依赖结构的重量使用类似的弹性绳）。我曾经见过使用橡皮绳悬挂导弹和大型风机叶片。也曾见过在很多不同的例子中使用空气气囊。我还是继续之前的话题，使用不同的方式实现自由-自由设置。但原则是你要确保边界条件不会干扰待测系统。边界条件应该对系统的弹性模态影响很小。当这一点实现了，那么我们可以说测试设置对待测系统感兴趣的弹性模态影响很小。

但我们实际上需要检查，确保测试设置对系统的弹性模态没有影响。我们需要设置一组支承位置将结构支承起来进行测试，然后用另一组支承位置支承结构或者改变支承位置的支承刚度（比如可用双倍根数的橡皮绳或者改变空气气囊的压力）重新测试。如果系统的弹性模态变化不明显，那么支承条件可能影响很小。但这可能仍然有一些来自边界条件的影响，需要仔细检查它。

作为说明实例，我使用最近测试的两个结构，测试时使用了一些非常规的边界条件。首先是一个非常轻质的框架结构，有非常密集的弯曲和扭转模态。而第二个结构是质量更重的锚板，用于冲击响应谱测试。

支承第一个结构的灵感来自于与一位同事的手机通话。他在课堂上提及到对于隔振系统，你可以使用任何支承方式，有学生问他，最极端的方式是什么，他迅速，以一种滑稽的口吻回答说，“我不关心你使用了棉花糖支承，如果你想的话”。我听到这决定使用不同尺寸的棉花糖测试我们标准的试验结构。在实验室，使用非常小的棉花糖和非常巨大的棉花糖支承我们的框架结构进行模态测试。这个框架是精心设计的，使之第1阶弯曲模态和第1阶扭转模态非常、非常接近，达到了频率成分几乎要重叠的地步。

第一次测试（测试#1）使用4个巨大的棉花糖支承4条边的中点位置，这些位置也是扭转模态的节点。第二次测试（测试#2）使用10个小棉花糖沿框架分布支承。这两次测试需要注意的事是弯曲模态和扭转模态交换顺序了。因此，第三次测试（测试#3）使用4个巨大的棉花糖支承框架的4个角点位置。

结构的刚体模态明确受棉花糖位置布置的影响。但重要的是弹性模态也表明不同的配置下，频率也有细微差异。因此，边界条件对系统的弹性模态也有一些小的影响。但更重要的是测试#1和测试#2中弯曲模态和扭转模态出现的先后顺序明显不同。因此，要着重认识到支承条件可能对模态频率和模态顺序有重要的影响。注意到测试#2和测试#3有相同的模态顺序。因此，不仅需要小心频率移动，还要关心因测试设置导致的模态顺序变化。图1给出了这三次不同测试设置的前两阶模态结果，同时也给出了带棉花糖支承的结构照片和典型的驱动点频响函数。



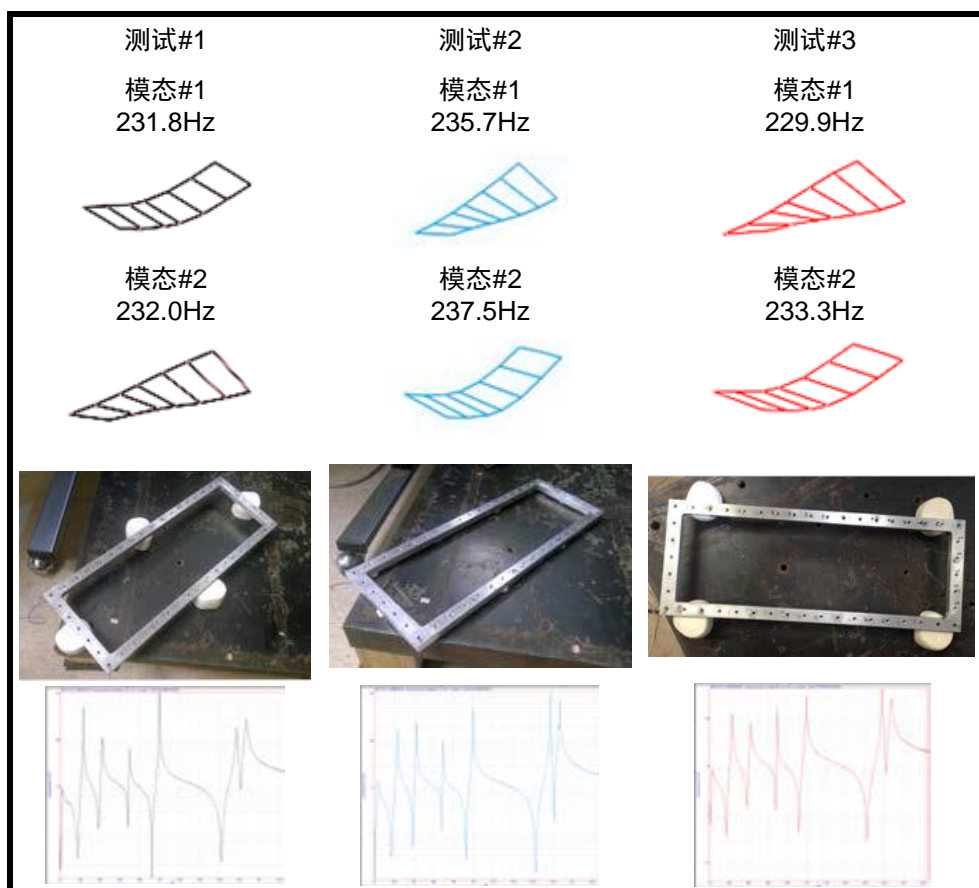


图1 棉花糖支承的框架结果

第二个结构是实验室现有的冲击响应谱平板。这个结构要安装在空气活塞悬浮系统上，但在这个安装系统可用之前，我们需要一个快速的模态测试用于验证模型和做一些初步的冲击预测。没有可用的空气活塞来支承这个结构，需要设计一个粗糙的漂浮支承。现在高校里，科研经费总是有限的，因此，需要提供一个实用、经济的支承系统。经过一天的思考之后，在我的头脑中出现了一个高招。那就有使用易于取材的旧马桶吸盘（马桶堵塞住时用来疏通的皮吸碗）支承冲击平板，这似乎是一个非常好的可行方案。

当我在五金店购买 6 个马桶吸盘时，收银员非常惊讶。250 磅的冲击平板测试时采用两种配置：一种用 3 个吸盘位于空气活塞位置支承，另一种用 6 个吸盘。

测试结果非常好，两种配置下的刚体模态也非常好。刚体模态和弹性模态非常相似，如图 2 所示，左边为三个吸盘支承，右边为 6 个吸盘支承。结果非常好，以致于最近一个来自欧洲的参观者提出了这样的问题，在易贝（E-Bay）上哪可以购买到这样的吸盘（我回答，在当地的五金店就有销售，可以购买一些全新的，他们每个只要 5 美元，相比一些更昂贵的配置，这个更划算，且效果不错）。

因此，你可以发现一些不同的，并且非常简单的机制实现自由-自由配置。但是你要注意边界条件可能会导致一些频率移动，这些移动的频率可能对于进一步的后续分析是非常重要的。另外，边界条件可能对系统的模态顺序有影响，如前面的框架结构中第一次的测试设置。

我希望这些解释能帮助你明白问题。你看到从棉花糖到马桶吸盘，还有很多不同的支承条件都可用于完成待测系统的自由-自由支承，你只需要仔细检查你的测量。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。

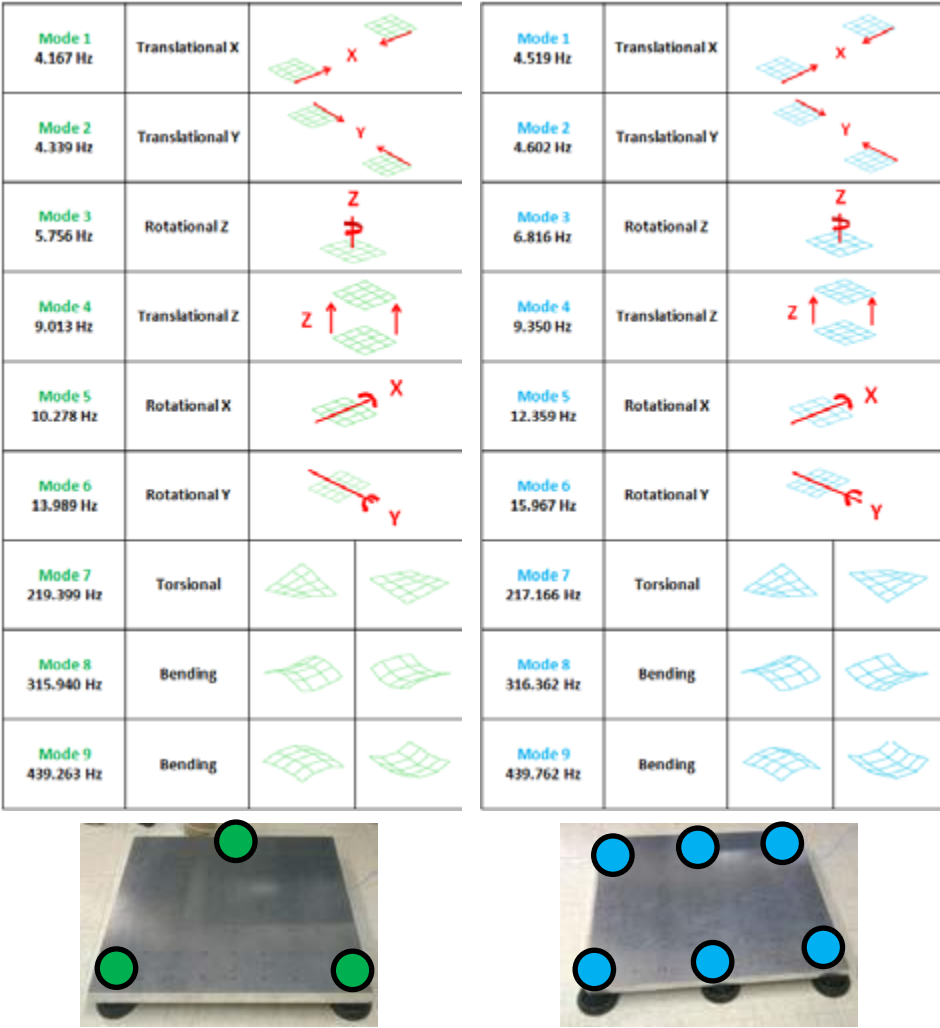


图 2 马桶吸盘支承的锚冲击板的模态结果



在结束《模态空间》系列文章之前，你最后还能提供一些建议吗？

好的，我在这给出最重要的前十条。

当你涉及到模态分析项目时，不管是仿真分析还是实验，如果你回看所有的文章，会有更多的信息帮助你变得更仔细。当你在模态领域工作时，确实需要知道一些非常重要的因素。虽然这有许多项可以列出，但我只打算列出前十条（因为 10 似乎是一个非常不错的数字）。因此，让我们从后往前列出我精心选择需要小心的前十条。

因此，采用大卫·莱特曼的方式，“让我们开始吧”。

### 第 10 条：你为什么要进行这个测试

为什么问为什么？那是因为这个问题是最重要的问题。

让我详细说明这个问题，在这讲得更详细一点。很多时候，我们进行测试是因为有人相信测试将解决一些问题，或者有人“认为”测试将解决一个问题。

我对进行测试没有疑问，但很多时候人们真的不知道测试能提供什么或者不能提供什么。对我来说，这就是人们总问“为什么”要做测试的原因。模态测试操作有问题吗？从测试可以得到什么额外的东西？感兴趣的频率范围是多少？真正关心多少阶模态？等等。在你进行测试之前，找出尽可能多的问题是非常重要的，这样能保证所有人对测试将提供什么都很明白。

我那样说是因为我曾经见过许许多多例子，人们“声称”他们明白了测试，非常清楚他们能从测试中得到什么。然而一旦获得了测试结果，便有这样的出了问题：为什么测试没有回答感兴趣的问题。有时，也会出现分歧是因为我们所用的词语对不同的人来说可能有不同的意思。因此，通常我总是问得特别明确，人们想知道什么，并仔细地询问（带一些解释）他们从测试中要得到的每个东西的意义是什么。

举个例子，我记得有一群汽车行业年青工程师想“学习”怎样做简单刹车片的模态测试和怎样与有限元模型做“相关性分析”。所有问题都正确，他们看起来非常努力，在明白更复杂的系统之前，试图去理解一些最基本的知识和学习怎么一步一步理解一些必要的知识。所有讨论的问题和考虑的事项似乎看起来都正确。

在项目开始之前，这群年青人想对他们的管理部门做个介绍，关于他们即将承担的工作，再次好的东西都应“入股”到这个项目中。在他们按这种方式介绍这个项目之前，任何事情似乎进行得很顺利。

“Hello，各位，这个项目将对刹车片进行测试，测试结果用于与有限元模态进行相关性分析。这个项目的结果将用于解决刹车片的啸叫问题”。那是他们第一次提及刹车啸叫问题。这个啸叫问题和他们原来讨论的问题，完全没有联系。

因此，为什么要问为什么？这恰恰就是原因!!!

### 第 9 条：选择合适的测点

我经常看到人们开始模态测试时，紧张地选择所有的测量位置，并且生成了一个精细

的几何文件，得到了所有位置的坐标，但这时还没有进行一次测量。

在你颠倒建立几何模型之前，首先应该出去进行一次测量。实际上应进行少数几个测量，检查不同的测量位置和不同的测量方向。如果你确实不清楚系统的所有模态是什么样子，这将非常关键。在你对系统所有模态有一些想法之前，选择所有的位置用于测量是没有道理的。

经常，你认为需要测量的点可能实际上不是最佳的位置，这依赖于系统的模态振型。然而，我认为 FRF 将告诉我们很多结构信息和频率信息，而这些真的是你首先需要关注的。

然后可能需要进行少数测量以确保你真的清楚结构的模态振型是什么样子。一旦你确实清楚了所有的模态振型，那么你可以选择更多的测点进行测量。我经常看到人们确定 100 到 150 个测点用于模态测试，拟合这些数据，然后查看这些模态振型才意识到布置到一部分结构上的测点与感兴趣的模态关系不大。

也要确保 FRF 测量时，从参考位置你如果不能观测到所有模态，那也应该是能观测到尽可能多的模态。如果所有的模态不能从一个参考位置观测到，那么选择额外的参考点势在必行。当进行锤击法模态试验时，总是建议使用尽可能多的参考点。

如果你有 4 通道测试系统，那么你可以一个通道用于连接力锤，其余三个通道连接参考点位置的传感器。没必要在 X、Y 和 Z 方向各布置一个参考传感器，而是要确保从这三个参考点位置观测到尽可能多的模态。

如果你有 8 通道测试系统用于移动力锤的模态试验，那么可以使用 7 个参考点。你可能会认为参考点过多，但是对于采集数据而言，真的不需要花费过多的精力，另外采集过多的数据，对我们并没有害处。

很多时候，你可能这样认为：使用 7 个参考点，你可以得到所有的模态。我记得有一次试验，对一个大型的对称复合材料平板布置了 9 个参考加速度传感器，但却丢失了一阶高阶模态，原来是所有的 9 个参考点都位于这阶模态的节点上。谁也没有猜想到你是如此的不幸（我建议这个人坚决不要去拉斯维加斯进行赌博了，因为他的运气实在是太差了）。这阶高阶模态和 9 个参考点位置如图 1 所示。

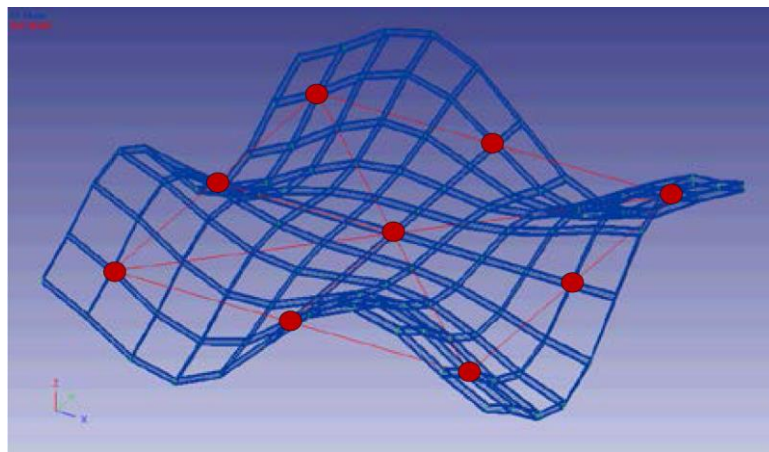


图 1 9 个参考点位置全都布置在这阶模态的节点上

## 第 8 条：选择合适的锤头

对模态新手来说，选择合适的锤头经常困扰他们。本质上，你要确保你选择的锤头能激励起的频率范围与结构处于工作状态下被激励起的频率范围相同。当然，这意味着你要对结构真正重要的频率范围是多少有所了解。我记得多年前当我们开始对棒球棒进行模态试验时，对选择什么样的锤头最合适进行过长久的讨论。我认为你需要选择使用的锤头能激励起的频率范围与棒球棒被球击打所激起的频率范围相同。第二天，当我走进实验室时，学生们

已经将一个 10-32 长的螺柱钉进了棒球里，然后将它拧紧到力锤上。当然，这是一个非常不错的主意，因为它激起的频率范围与实际球棒在击打棒球时所激起的频率范围相同。

另外，你要必须记得力锤锤头不是控制输入力谱的唯一因素。结构的局部刚度在实际输入到结构的力谱中也扮演着重要的角色。因此，你需要密切关注这一点。顺便，你可以把从力锤制造商那得到的曲线放置一边，因为这些曲线通常是通过锤击大质量的刚板得到的，我们实际模态测试时从来不会测试这样的结构。

锤击测试另一个关键因素，但又经常不认真对待的是每次锤击时，力锤必须一致地锤击结构，也就是每次测量时，应锤击相同的方向和相同的位置。如果这一点做不到，那么在每次平均之间，FRF 将存在一些变动，这将导致相干质量降低。对大型结构进行测试，可能这一点不难，但对小型结构，每次锤击同一点同一方向可能比较困难。

一次对高尔夫球杆头进行锤击法模态试验，为了实现每次测量一致性地锤击同一个方向和同一位置，使用了一个独特的三角架/力锤装置，如图 2 所示。

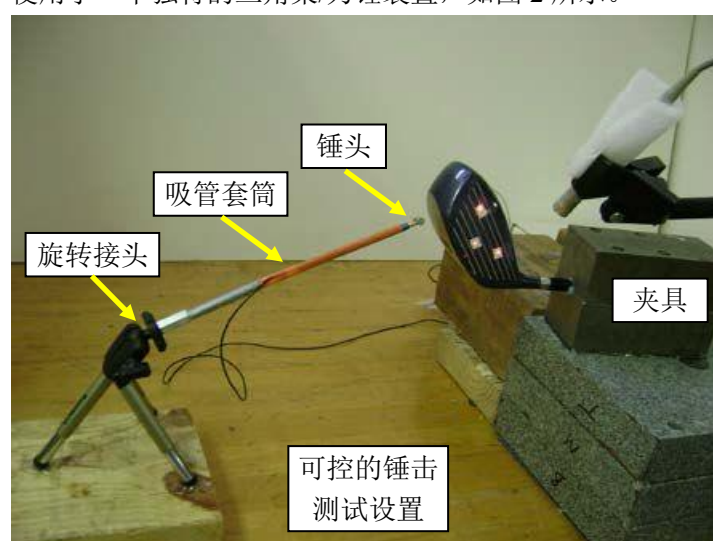


图 2 锤击法测试装置

## 第 7 条：需要多自由的边界条件

之前已有几篇文章与这个主题相关。需要知道最重要的事是你的测试结构实际上是附加了所有的测试仪器和支承条件。结构的有限元模型可以按自由状态来建模，但现实中的待测结构需要软弹簧来支承，为了合理解释支承系统，这些软弹簧真的应包含在模型当中，同时待测结构附加的所有测试仪器也应包含进来。很多时候，这些都不会影响整个测试，但在一些情况中，结构分析模型中包含它们实际上是非常重要的。

但是你真的应该想让刚体模态与弹性模态合理分开，还是有一些模态重叠，或者二者之间有相互耦合。说起来容易，但经常实现起来比较困难。大多数时候，我建议有限元模型应包含支承结构的影响，这样便于清晰地理解测试设置是怎样与待测结构之间发生相互作用的。虽然有限元模型可能不完美，但是有限元模型是研究支承结构刚度变化影响和因刚度变化导致的系统弹性模态发生相应变化的绝佳工具。

但是如果没有有限元模型可用，那么需要检查测试设置以精确确定测试设置与试验之间的相互作用。这可能需要花费一些额外的精力，但这是测试设置的一个关键部分，需要纪录与确定。

因此，当对导弹进行模态测试时，这一点非常重要。很难使导弹处于自由-自由边界条件。因此，我们能实现的最佳方式是将测试的导弹悬挂在龙门架上，悬挂的位置是第一阶弹性模态的节点，这样支承条件对结构模态没有干扰，因为悬挂位置是模态节点。图 3a 展示



了一种类型导弹的典型测试设置，呆伯特（卡通人物）正对它进行锤击模态测试；图 3b 展示了使用激振器对一种小型导弹进行模态测试。



图 3a 对悬挂点接近第 1 阶弯曲模态节点的导弹进行锤击测试



图 3b 对悬挂点接近第 1 阶弯曲模态节点的导弹进行激振器测试

## 第 6 条：其他一些易犯的重大错误

总有一些重要且简单的事情经常易被忽视。因而，为了确保所有的设置都合理需要进行一些简单而明智的检查。

要确保所有的导线都是完好的，没有起皱褶或弯曲。要确保所有的接头都紧固连接。经常出现虚假的信号，特别是力锤，可能是导线连接松动造成的。

当然，要确保所有的信号调理器的开关都是开着的。同时要确保你已明白你所有的传感器是电压型还是 ICP 型。我曾见过许多测试把 ICP 型传感器设置成电压型，这样得到的测量是无用的。当然，你可能会认为测量看起来质量不高，但如果你在测量处理过程中假设结构是一个复杂的，非线性的，大阻尼的系统，那么你会认为你的测量就是这么差。

当然如果你的测量系统设置不合理，那么你的测量将会非常糟糕，而你可能会认为你能做的最好测量也就这样了，即使你的测量完全是错误的。

你同时也必须知道，如果你仅拥有一把力锤，这不意味着你计划进行的所有测试这把力锤都合适。我曾经看到人们这样做，都欲哭无泪了：对一个大型结构使用一把明显型号过小的力锤进行激励，这样激励能量明显不够（相信我，我曾经见过一些锤头都被锤得开花了，犹如经历过核爆炸）。采用合适大小的力锤进行测试，而不是使用一个不合适的力锤。



另一个重要的考虑因素与使用的传感器的大小有关。质量载荷是一个非常重要的考虑因素。已有写了许多文章去理解这些影响，在这再次强调和说明一下。这是因为即使你有最小的加速度传感器，但这并不意味着质量载荷就不是关心项了。加速度传感器的质量不是相对于待测结构的总质量，而是相对于待测结构的有效质量。一个加速度传感器安装在刚度/质量非常大的位置和安装在相同结构的轻质，薄弱位置，那么因质量带来的影响是不同的。

另一个更重要的因素是你需要确保你的传感器不过载，不然将不能提供有用的测量。我曾经参加过一些试验，人们购买非常灵敏的传感器，因为他们认为这样的传感器“更合适”，但后来发现他们的结构响应非常大，导致传感器过载。

## 第5条：连击

如果可能的话，我们真的希望能避免连击。但却在许多实例中，我们不能避免它们。因此，设法获得最佳的锤击测试是进行单次锤击。但是如果有连击，那么要做的事就是观察输入力的功率谱。只要力谱相对平坦，没有明显的衰减，同时 FRF/相干看起来也不错，那么最可能的是测量对于确定频率和模态振型来说是胜任的。

但当然你肯定会问需要多平坦的力谱和力谱衰减多少是可容忍的。问的这些问题都非常关键。我不是要说力谱衰减不能超过 5-10dB，而是只要相干质量好，那么 FRF 便可接受。

我知道有些人可能会争辩，说力谱衰减太多，测量就是完全不可接受的。但如果你回看以前的一些文章，我们已经展示过一些案例，当比较没有连击和有一些连击或者甚至很多连击时，连击下的频率和模态振型实际是完全可接受的。虽然这样说，但你仍然需要非常仔细，以确保测量的数据是有用的。

再回想一下，之前有几篇文章讨论过连击，其中有一篇文章还故意对结构应用了多次锤击用于“猝发锤击”激励测试。虽然那些展示的结果是对一个研究型的结构进行的，但在过去这些年中，我实际上测试过一个大型射电望远镜和一个大型（50 多米长）风机叶片，这两个例子清楚地表明多次锤击技术提供更为优秀的结果。图 4a/b 中的 FRF 和相干测量为大型风机叶片的测试结果。图 4a 为单次锤击测试结果，FRF 测量显然存在变化，并且相干表明测量中包含噪声。图 4b 为多次锤击结果，使用多次锤击技术显著地改善了 FRF 和相干。当然，你需要特别仔细，以确保整个输入和输出都是在一个 FFT 时间窗函数的采样周期内观测到的，如果做到了这一点，那么测量结果将大为改善。

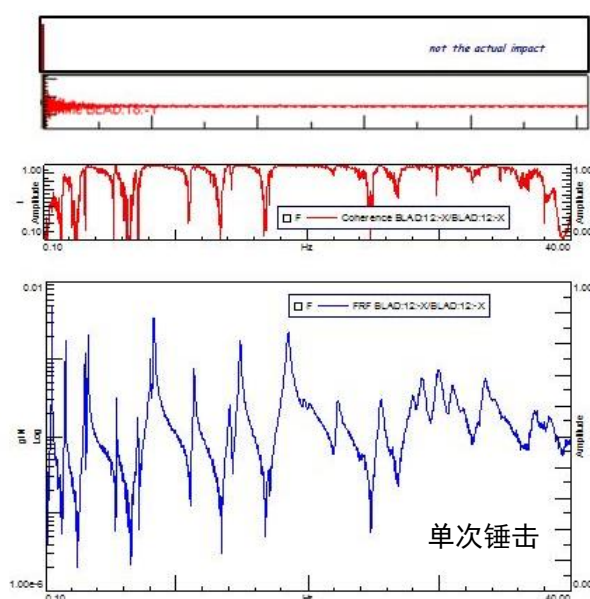


图 4a 大型风机叶片的单次锤击 FRF

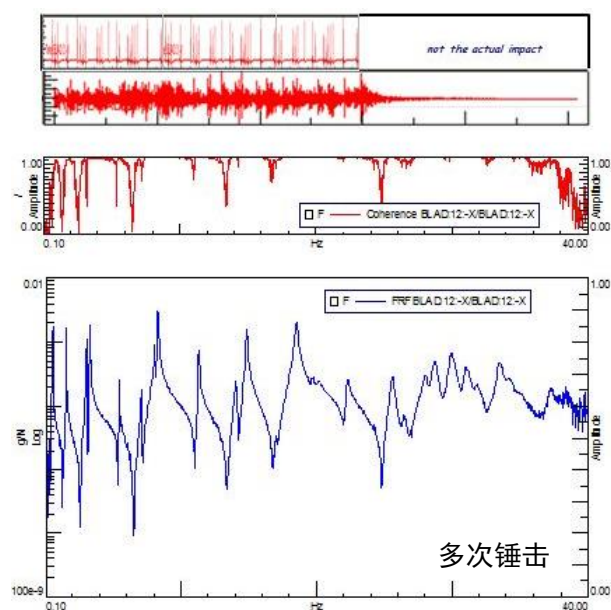


图 4b 大型风机叶片的多次锤击 FRF

#### 第 4 条：窗函数

关于窗函数，我要非常抱歉地说，不加窗是最好的窗函数，因为任何窗函数都会使数据失真，窗函数是一个无可避免之灾祸。这些强烈的声明，我经常提到。

做任何可能的测量，你都要确保输入信号和输出响应信号要么在采样窗内是周期信号，要么在一个采样间隔内能完全捕捉到。如果做到这一点，那么你不需要任何类型的窗函数。

当进行锤击法测试时，总是试图去改变采样参数以确保信号能能在一个采样间隔内完全观测到。如果能实现这一点，信号将不存在泄漏，不需要任何窗函数。图 5 表明简单地改变采样时间，就可消除窗函数的使用。

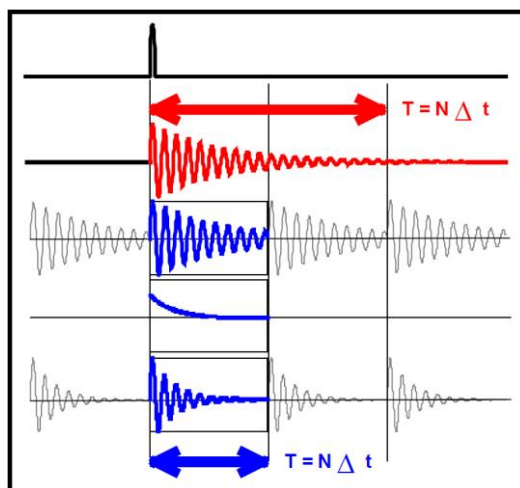
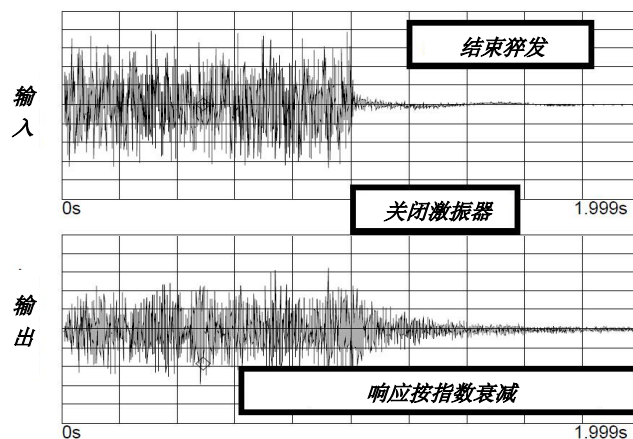


图 5 蓝色表示更短的采样时间需要窗函数，  
而红色表示改变采样时间可消除窗函数的使用

对于激振器模态测试而言，同样适用。在激振器测试中，我们试图创建的数据样本是在一个采样周期内能完全测量到的（之前描述的锤击法测试也是这样）。或者，通过其他选项创建的激励信号产生的响应是重复的。如果这一点能实现，那么系统将会达到稳态响应，因而满足 FFT 变换要求，信号无泄漏，不需要任何窗函数。激振器测试中，有多个激励信号可产生这样情形。这些专门的模态激励信号，如伪随机，周期随机，猝发随机和正弦快扫

等这些专门创建的模态激励信号产生的响应要么是周期信号，要么在一个采样间隔内能完全观测到。图 6 展示了最常用的猝发随机激励信号，它提供的激励信号开始和结束都在一个 FFT 采样间隔内，因而不需要窗函数，因为没有泄漏。产生的响应的开始和结束也都在一个采样间隔内观测到，也不需要窗函数。因此，这个激励信号没有泄漏，不需要任何窗函数。

### 时域信号



### 频域信号

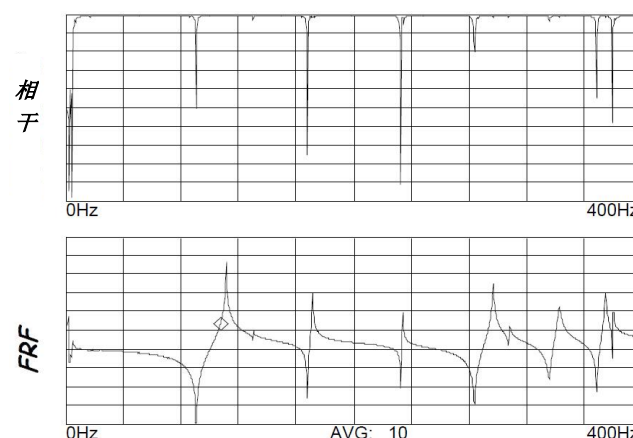


图 6 激振器猝发随机激励提供无泄漏的 FRF 测量

## 第 3 条：锤击法模态测试设置惯例

每次我进行锤击法模态测试设置时，总有一些惯例，通常我会仔细检查以确保我能进行最佳可能的 FRF 测量。并不是每次试验都有有一套特定的步骤，但这的确有些关键事情，每次 FRF 测量我都要做。当然，我所说的这些是针对之前完全没有测量经验的结构或者完全新颖的结构。（如果是我每天都要测试的结构，那么可能有些步骤就不需要了，因为我对这样的结构的结果是什么样子已经有了先验经验）。

当我开始一次测量时，我不认为每步都是理所当然的。我开始的一次测量的频率范围要宽于每人都“相信”的感兴趣的频率范围。所使用的力锤锤头在这个频率范围上激励结构，我总是检查施加到待测结构上的输入力的功率谱。当然，当我进行第一次测量时，我可能需要调整输入力和加速度响应的电压量程。这一步可能需要手动修改，除非你的测试系统对所有的响应信号具有“自动量程”的功能。为了激起合适的频率范围，我可能需要改变锤头，然后检查以确保不同的锤头下所有的响应量程都是合适的。

一旦输入激励合适，那么我们将开始查看响应，FRF 和相干。但首先我要做的是检查响应的衰减，看响应信号是否在一个采样时间周期内完全捕捉到了。如果这一点满足，那么

我们不需要加窗。如果不满足，那么可能我们需要考虑更长的采样时间。如果这样做还不能使响应信号在采样周期内衰减到零，那么，我们可能需要加窗了，所加的窗函数应是指数衰减的窗函数。

如果这一点满足了，那么我们要进行一些平均了，然后查看 FRF 和相干。如果这是可接受的测量，那么下一步，我们是要更换锤头以便激励稍微窄一点的频率范围，还记得之前开始时，我选择的是更宽的频率范围，这样做只是为了对结构有个大致的了解。这是个不错的机会能确保锤头能激起感兴趣的频率范围（但这个频率范围是个更高的频率范围）。但更小的输入力作用在结构上，那么要确保所有的电压量程设置还是合适的，最初使用的指数窗和最开始设置的其他参数是否还合适。一旦检查了所有的设置，那么就进行测量吧，然后评估 FRF 和相干。

接下来要做的是改变 FFT 分析仪的频率范围到更低的频宽，这个频带与实际使用的更软的锤头最近激励的频带相关。再次检查相同的参数，以确保设置了合适量级能获得高质量的测量。

对于测量处理而言，我只强调你需要检查所有的参数，你每次只改变一个参数，看结果有什么变化。记得当我改变测量的频率范围时，谱线数、锤头和使用的窗函数都要检查。当进行测量时，所有的这些都需要考虑。当所有的参数都设置合理时，才能获得质量更高的测量。到这为止，我才开始采集多组测量数据用于实验模态测试了。

## 第 2 条: $U_i$ 乘以 $U_j$

这一条可能是最需要考虑的一条了。但这意味着什么呢？让我们写出相关的方程以便解释它的含义。FRF 可以用留数项或者模态振型项来表示（这些公式之前的多篇文章中都用到过），如图 7 所示。

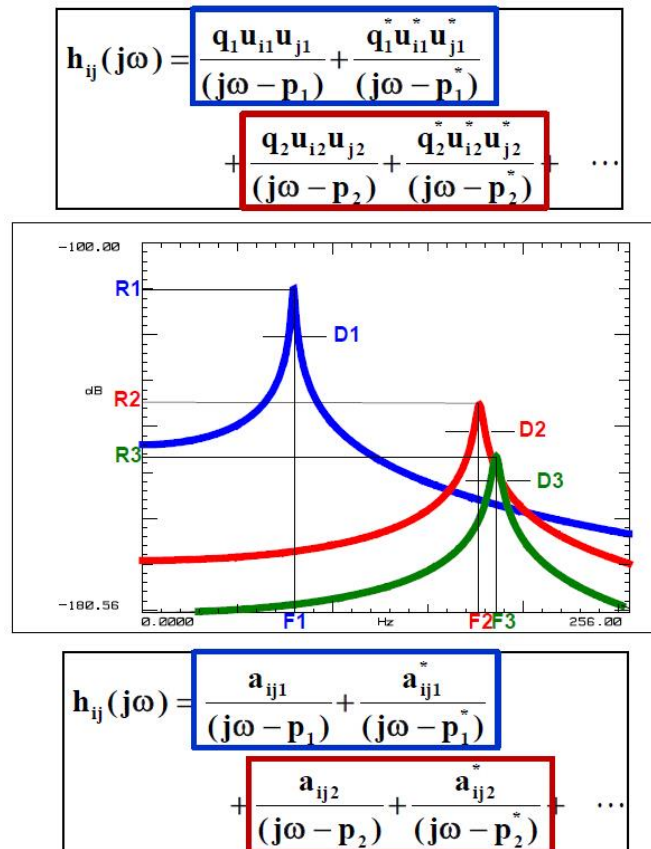


图 7 FRF 使用留数和模态振型一阶一阶的表示

图 7 中下面的方程是在大多数讲义中最常见的方式。这个公式非常有用，但只有当你真正明白什么是留数时。图 7 中上面的方程实际上与下面的方程是相同的，只是留数用模态振型来表示了。特别地，留数（直接与频响测量的幅值相关）是某阶感兴趣的模态在输入位置的模态振型值乘以输出响应位置的模态振型值，它将确定这阶模态的频响函数的幅值。当然，所有模态的影响是系统所有模态的线性叠加。

因此，这告诉我们什么呢？本质上，它给出了 FRF 峰值幅值的清晰定义，这跟某阶模态在输入-输出位置的模态振型值相关。

经常有人问我，为什么一次测量中某阶模态的幅值非常低呢？这个方程告诉我们，对于某阶特定的模态要么是输入激励或者输出响应（或者二者）的值非常小，这可能是这二者同时或之一接近模态节点位置。如果你想让那阶模态的峰值更大，那么你真的需要改变输入和/或输出位置，将他们放置在振型值更大，并且远离这阶模态节点的位置。

实际上如果你想进行一次测试，想选择合适的位置进行测量，那么你真的需要知道系统各阶模态在什么位置振型值大。有限元模型是一个非常有用的工具，可以帮助我们确定所有的传感器放置在什么位置合适。虽然有限元模型可能不完美，但确定是一个非常有帮助的工具。

我想如果你看过模态空间系列文章，那么你会发现这个主题在许多文章中都出现过。深入理解这个原理将是个非常有价值的，它会让你明白实验模态过程中许多问题。

实际上实验室里的学生也有他们自己的模态测试前十条，这十条是从他们的视角来表示的……

## 模态准则

（至少是从模态学生的视角）

1. 模态高手有好的建议
2.  $u_i \cdot u_j$
3.  $u_i \cdot u_j$
4. 见第二条和第三条
5. 不要问高手问题，除非你想做更多的工程项目
6. 如果你计划在 30 分钟内问完离开，那么不要问高手问题
7. 必须能一口气说完：“复数的模是实部和虚部平方和的平方根”
8. 必须能一口气说完：“倘若满足傅立叶变换的周期性要求，不需要加窗”
9. 记录所有的事情
10. 还是记录

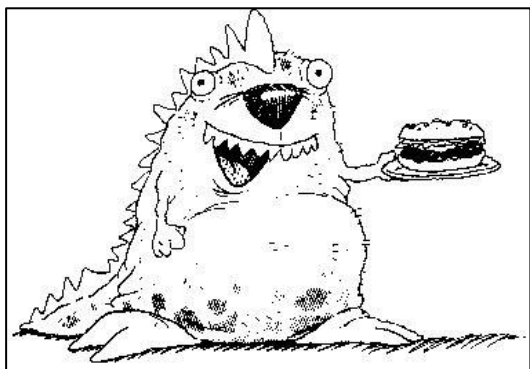
你可以看出第 2 条和第 3 条，及接下来的第 4 条是模态准则中相当关键的准则，它可能可以回答你的许多问题。

### 第 1 条：思考不是随意的

现在让我们来讲讲“头条”。那就是当你在做测试或分析时，你真的需要一直思考你正在做什么。没有什么什么是世俗的，思考是必须的。这不像你在汉堡王（Burger King）工作，所有东西都有非常清晰的定义。汉堡，炸薯条，可乐……按下按钮，所有的价格是确定的，不需要你思考任何东西。

一旦你停止思考，将会盲目跟从一些准则，那么你可能会陷入模态怪物手中，你的结果可能也是无用的。如果你遭遇问题，而这些问题需要你注意和一些思考以便知道你的测量中到底发生了什么。





不要让模态怪物统治你，当你进行测量和进行模态测试时，要明白你正在做什么，总是要思考，问题要设想，要处于高度警惕状态。毫不迟疑地返回重读模态空间所有文章，这有许多重要的方面能帮助你回答你的问题和关心项。

我希望这最后一点建议能给你莫大的帮助。如果你还有模态分析其他问题，请咨询我。

作者注释：这将是实验技术的 SEM 出版的最后一篇文章，这个系列已持续 17 年。我希望这些信息对所有工作在分析和实验模态领域的人们是有用的。

虽然这个系列将在实验技术杂志社结束，但模态空间系列文章将继续在**结构动力学和声学系统**网页 <http://sdasl.uml.edu> 上发行。

更多详情见 <http://sdasl.uml.edu/umlspace/mspace.html>

谢谢在实验技术杂志发行这些系列文章期间，所有提供评论、问题、邮件和支持的人们。我将继续撰写更多的文章，直到回答完你所有的问题为止。